Une propriété de la surface représentant les couples de points d'une courbe de genre trois ;

Par Lucien GODEAUX.

Nous avons à diverses reprises étudié les surfaces irrégulières contenant une involution cyclique régulière n'ayant qu'un nombre fini, non nul, de points unis ([1]). Nous avons notamment établi le théorème suivant :

Si une surface d'irrégularité $q > 1$ contient une involution cyclique régulière d'ordre premier p n'ayant qu'un nombre fini non nul de points unis, elle est l'image d'une involution cyclique d'ordre p appartenant à une surface irrégulière ([2]).

Ce théorème est susceptible de nombreuses applications. On peut, par exemple, démontrer qu'une surface de Jacobi représente une involution d'ordre 2, privée de points unis, appartenant à une surface de Picard de diviseur 2. Cela tient à l'existence de la surface de Kümmer, qui représente une involution de second ordre ayant 16 points unis, appartenant à la surface de Jacobi. On pourrait de même démontrer qu'une surface de Picard de diviseur δ représente une involution du second ordre privée de points unis appartenant à une surface de Picard de diviseur $\delta + 1$.

([1]) *Sur les surfaces de Picard de diviseur* 2 (*Bull. Acad. roy. Belgique*, 1927, p. 394-414); *Sur une propriété des surfaces algébriques irrégulières contenant une involution régulière d'ordre* 2 (*Ibid.*, 1927, p. 524-543); *Sur les involutions régulières d'ordre* 3 *appartenant à une surface irrégulière* (*Ibid.*, 1927, p. 707-724).

([2]) *Les involutions cycliques régulières appartenant à une surface irrégulière* (*Bull. Sc. Math.*, 1943, p. 145-158).

Si F est une surface irrégulière et Φ l'image de l'involution régulière appartenant à F, le procédé utilisé pour établir notre théorème consiste à prouver l'existence de deux surfaces contenant des involutions dont Φ est l'image, ces deux surfaces étant liées par une correspondance (2, 2). La surface qui représente les couples de points homologues de cette correspondance contient une involution dont F est l'image.

Il nous a paru intéressant d'appliquer notre théorème à un cas particulier. La surface qui représente les couples de points non ordonnés d'une courbe de genre 3 contient une involution régulière du second ordre dont la surface représentative a été étudiée par G. Humbert ([3]). Cette involution possède 28 points unis. Nous obtenons le théorème suivant :

La surface de genres $p_a = 0$, $p_g = 3$, $p^{(1)} = 7$ représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe de genre 3 à modules généraux, représente une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres $p_a = 1$, $p_g = 4$, $p^{(1)} = 13$.

Notons que par le même procédé, on pourrait démontrer que cette dernière surface représente à son tour une involution du second ordre appartenant à une surface irrégulière, privée de points unis, et ainsi de suite ([4]).

([3]) G. Humbert, *Sur une surface du 6e ordre liée aux fonctions abéliennes de genre* 3 (*J. Math. pures et appl.*, 1896, p. 263-293); L. Rémy, *Sur certaines surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre* 3 (*Ibid.*, 1908); *Sur une classe de surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre* 3 (*Ann. Ec. Norm. Sup.*, 1909).

Voir aussi notre Note : *Sur une surface algébrique considérée par M. G. Humbert* (*Bull. Sc. Math.*, 1921, p. 14-20).

Au sujet des surfaces représentant les couples de points d'une courbe algébrique, on peut consulter Severi, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (*Atti Accad. Torino*, 1902-1903, p. 185-200); *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (*Mem. Accad. Torino*, 1903); de Franchis, *Sulle varietà ∞^2 delle coppie di punti di due o di una curva algebrica* (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1903).

([4]) Nous utilisons les résultats que nous avons obtenus sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. *Voir* nos travaux : *Mémoire*

1. Soit A une courbe de genre 3, à modules généraux. Désignons par F la surface qui représente les couples de points non ordonnés de cette courbe. Cette surface a les genres

$$p_a = 0, \qquad p_g = 3, \qquad p^{(1)} = 7, \qquad P_2 = 7, \qquad \dots.$$

On sait, par un théorème de M. Severi, que les courbes canoniques C de F représentent les couples de points des groupes canoniques de A appartenant à une série linéaire de dimension 1, g_4^1. On obtient ainsi le réseau canonique $|C|$ de F.

Il existe sur la courbe A, ∞^3 séries linéaires g_4^1 non spéciales. Aux couples de points des groupes d'une telle série correspond une courbe isolée C_1, de genre 7, qui appartient à un système continu $\{C_1\}$, ∞^3. Le système canonique $|C|$ appartient à ce système continu. Le système $\{C_1\}$ a le degré 12 et le genre 7.

Le système bicanonique $|D| = |2C|$ de F a le degré 24, le genre 19 et la dimension $P_2 - 1 = 6$. Il appartient à un système continu $\{D_1\}$ formé de ∞^3 systèmes linéaires $|D_1|$ qu'on peut définir par la relation fonctionnelle

$$D_1 = C + C_1.$$

Le système $\{D_1\}$ a le degré 24, le genre 19 et les systèmes linéaires $|D_1|$ ont la dimension 6 comme $|D|$.

2. Soient P un point de F, P_1 et P_2 les points de la courbe A qu'il représente. Les points P_1, P_2 déterminant un groupe canonique de A. Soient P'_1, P'_2 les points qui complètent ce groupe et P' le point qui les représentent sur F. Le point P' est déterminé par P et réciproquement. Les points P et P' se correspondent donc dans une transformation birationnelle involutive T de F en soi, sans exception. Nous désignerons par I l'involution du second ordre

---

sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 1914, p. 289-312); *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Act. Scient.*, n° 270, Hermann, Paris 1935); *Mémoire sur les surfaces multiples* (*Mém. Acad. roy. Belgique*, 1952); *La théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Bull. Soc. roy. Sc. Liège*, 1957, p. 3-15).

engendrée sur F par T et dont P, P′ forment un couple. Soit Φ une surface image de cette involution.

On peut prendre, comme modèle projectif de la courbe A une courbe plane du 4^e ordre.

Pour qu'un point P coïncide avec son homologue P′, il faut que P'_1 par exemple coïncide avec P_1 et P'_2 avec P_2, c'est-à-dire que les points P_1, P_2 soient les points de contact d'une bitangente à A. Celle-ci possède 28 bitangentes, donc *l'involution* I *possède 28 points unis*. Soient $P_1, P_2, \ldots, P_{28}$ ces points.

Par construction, le réseau canonique $|C|$ de F appartient à l'involution I. Nous désignons par Γ les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C. Les courbes Γ forment le réseau canonique $|\Gamma|$ de Φ et le genre géométrique de cette surface est $p'_g = 3$.

Entre le genre arithmétique $p_a = 0$ de F et celui, p'_a de Φ, nous avons la relation, établie dans nos recherches sur les involutions,

$$12(p_a+1) = 24(p'_a+1) - 3.28, \qquad \text{d'où} \qquad p'_a = 3.$$

La surface Φ est donc régulière. Le système canonique $|\Gamma|$ a le degré 3 et, par conséquent, le genre linéaire de Φ est égal à $p'^{(1)} = 4$

Le bigenre de Φ est $P'_2 = p'_a + p'^{(1)} = 7$, donc le système bicanonique de la surface F appartient à l'involution I.

Le système $\{C_1\}$ est transformé en soi par T.

On sait qu'il existe 63 systèmes de coniques touchant la courbe A en quatre points et que ceux-ci forment une série g^1_4 non spéciale, à laquelle correspond donc une courbe C_1. Dans un de ces systèmes de coniques, il y en a six qui dégénèrent en des couples de bitangentes, donc la courbe C_1 correspondante passe par 12 des points unis de l'involution I. Ainsi, il y a 63 courbes C_1 appartenant à l'involution I et passant chacune par 12 points unis de cette involution. Nous les désignerons par $\overline{C}_1$.

3. Rapportons projectivement les courbes bicanoniques 2Γ de Φ aux hyperplans d'un espace S_6 à six dimensions. A la surface Φ correspond une surface d'ordre 12 que nous avons démontré être l'intersection d'un cône V^4_3 dont les sections hyperplanes sont des surfaces de Veronese, et d'une hypersurface cubique V^3_5 ne passant

pas par le sommet du cône ([5]). Nous désignerons cette surface par Φ_2.

A chaque point uni de l'involution I correspond un point double conique de Φ_2, qui possède ainsi 28 points doubles coniques. Nous désignerons ceux-ci par $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{28}$.

Considérons une courbe $\overline{C}_1$ appartenant à l'involution I et passant par 12 points unis de cette involution. Soit Γ_1 la courbe qui lui correspond sur Φ. La courbe $\overline{C}_1$ est de genre 7, donc, en appliquant la formule de Zeuthen, on trouve que la courbe Γ_1 est elliptique. Les courbes C_1 rencontrent les courbes canoniques en six points, donc les courbes bicanoniques 2 C en douze points et par conséquent la courbe Γ_1 est d'ordre 6.

Considérons une courbe C_1 n'appartenant pas à l'involution et la courbe C'_1 que T lui fait correspondre. A la courbe C_1 correspond sur Φ une courbe X de degré 6 et de genre 7, qui correspond également à C'_1. Les six points communs à C_1 et à C'_1 forment trois groupes de l'involution I et il correspond à chacun de ces groupes un point double de la courbe X. Celle-ci possède donc trois points doubles variables avec la courbe. La courbe X appartient totalement à un système linéaire $|X|$, de genre 10 et de degré 12, dont la courbe générique est dépourvue de points doubles.

Faisons varier la courbe C_1 d'une manière continue dans $\{C\}$ en la faisant tendre vers une courbe canonique C. La courbe C'_1 tend également vers cette courbe C et la courbe X vers la courbe Γ correspondante, comptée deux fois. On a donc

$$|X| = |2\Gamma|$$

et X n'est autre que le système bicanonique de Φ, c'est-à-dire le système des sections planes de cette surface.

Faisons maintenant tendre d'une façon continue la courbe C_1 vers une courbe $\overline{C}_1$. La courbe C'_1 tend vers la même courbe et la courbe X vers la courbe Γ_1 correspondante, comptée deux fois.

([5]) *Sur une involution rationnelle douée de trois points de coïncidence appartenant à une surface de genre* 3 (*Bull. Acad. roy. Belgique*, 1921, p. 653-665 et 694-702).

Mais cette dernière courbe passe par 12 des points de diramation de Φ. Supposons que ce soient les 12 premiers. Chacun d'eux est équivalent à une courbe rationnelle de degré virtuel — 2. Soient γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_{12}$ ces courbes. On a la relation fonctionnelle

$$2\Gamma \equiv 2\Gamma_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{12}.$$

Le long de la courbe Γ_1 la surface Φ est touchée par un hyperplan

4. Les systèmes canonique et bicanonique de F appartenant à l'involution I, pour avoir un modèle projectif simple de cette surface, nous prendrons comme sections hyperplanes de celui-ci les courbes tricanoniques E.

Le système tricanonique $|E| = |3C| = |C + D|$ a le degré 54, le genre 37 et la dimension $P_3 - 1 = 18$.

Le système tricanonique $|E'|$ de Φ a le degré 27, le genre 19 et la dimension $P'_3 - 1 = 12$.

En rapportant projectivement les courbes E aux hyperplans d'un espace S_{18}, nous obtenons un modèle projectif F_3 de la surface F et en rapportant projectivement les courbes E' aux hyperplans d'un espace S_{12}, un modèle projectif Φ_3 de la surface Φ. Sur F_3, la transformation T est induite par une homographie harmonique H possédant deux axes ξ_0, ξ_1 de dimensions 5 et 12. Les hyperplans passant par ξ_0 découpent sur F les transformées E_0 des courbes tricanoniques E' de Φ. Il en résulte que l'axe ξ_0 ne rencontre pas la surface F_3 et que, par conséquent, l'axe ξ_1 rencontre cette surface aux 28 points unis de l'involution I.

Les hyperplans passant par ξ_1 découpent sur F_3 des courbes tricanoniques E_1 auxquelles correspondent sur Φ_3 des courbes E'_1 de degré 13, de genre 12, formant un système linéaire de dimension 5. Les courbes E_1 passant par les 28 points unis de I, les courbes E'_1 passent par les 28 points doubles coniques de Φ_3. Chacun de ces points est équivalent à une courbe rationnelle de degré virtuel — 2 et nous désignerons par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{28}$ ces courbes. Nous avons établi qu'on a la relation fonctionnelle

$$2E' \equiv 2E'_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{28}. \tag{1}$$

5. Le système tricanonique $|E|$ de F appartient à un système continu $\{E_2\}$ formé de ∞^3 systèmes linéaires de mêmes caractères que $|E|$. Ces systèmes sont obtenus en prenant les ∞^3 systèmes $|D + C_1|$. Le système $\{E_2\}$ est transformé en soi par T.

Parmi les systèmes $|E_2|$, il en existe 63 qui sont transformés en eux-mêmes par T, ce sont les systèmes $|D + \bar{C}_1|$. Considérons un, $|E_2|$, de ces systèmes et rapportons projectivement ses courbes aux hyperplans d'un espace S_{18} à 18 dimensions. A la surface F_3 correspond une surface F'_3 d'ordre 54, à section hyperplane de genre 37. A la transformation T correspond une homographie H′, harmonique, transformant F'_3 en soi.

Comme nous venons de le voir $|E_2|$ contient les courbes $D + \bar{C}_1$, qui appartiennent à l'involution et qui passent par 12 points unis de celle-ci. Par conséquent il existe dans $|E_2|$ un système linéaire partiel $|E_{21}|$ appartenant à l'involution et dont les courbes passent par 12 des points unis de I, situés sur la courbe $\bar{C}_1$. En d'autres termes, les axes ξ_1, ξ_2 de l'homographie H′ rencontrent F′ le premier en 12 points unis et le second aux 16 points unis restants de l'involution.

Aux courbes E_{21} correspondent sur Φ des courbes E'_{21} de degré 21, de genre 16, formant un système linéaire de dimension r_1 au moins égale à 9, d'après le théorème de Riemann-Roch.

Aux courbes E_{22} découpées sur F′ par les hyperplans passant par ξ_2 correspondent sur Φ des courbes E'_{22} de degré 19, de genre 15 formant un système linéaire de dimension r_2 au moins égale à 8 d'après le théorème de Riemann-Roch.

D'après la théorie des homographies, on doit avoir

$$r_1 + r_2 + 2 = 19, \qquad \text{d'où} \qquad r_1 = 9, \quad r_8 = 8.$$

En répétant un raisonnement déjà fait, on voit qu'à une courbe E_2 du système $\{E_2\}$ non transformée en elle-même par T correspond sur Φ une courbe X de genre 37, possédant 27 points doubles variables avec la courbe. Cette courbe X appartient totalement à un système linéaire $|X|$ de genre 64 et de degré 104.

Faisons varier la courbe E_2 d'une manière continue dans $\{E_2\}$ de telle sorte qu'elle tende vers une courbe E_0, puis vers une courbe E_{21}, enfin vers une courbe E_{22}.

Dans le premier cas, la courbe X tend vers une courbe E' comptée deux fois et l'on a

$$|X| = |2E'|,$$

c'est-à-dire que $|X|$ n'est autre que le système 6-canonique de Φ.

Dans le second cas, la courbe X tend vers une courbe E'_{21} comptée deux fois. Cette courbe passe par 12 des points unis de I. Si l'on admet que ce sont les 12 premiers, on a

$$2E' \equiv 2E'_{21} + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{12}. \tag{2}$$

Enfin dans le dernier cas, la courbe X tend vers une courbe E'_{22} comptée deux fois. Cette courbe passe par les 16 derniers points de diramation et l'on a

$$2E' \equiv 2E'_{22} + \gamma_{13} + \gamma_{14} + \ldots + \gamma_{28}. \tag{3}$$

6. Les hyperquadriques de S_{12} découpent sur Φ_3 des courbes 6-canoniques de cette surface. Nous allons voir que ces courbes forment le système 6-canonique complet.

Les hyperquadriques de S_{12} linéairement indépendantes sont au nombre de 91 et le 6-genre de Φ_3 est $P_6 = 49$, donc il existe au moins 42 hyperquadriques linéairement indépendantes passant par Φ_3. Supposons qu'il y en ait $42 + \delta$.

Une section hyperplane de Φ_3 est une courbe E' d'ordre 27 et de genre 19. Comme les hyperquadriques de S_{11} sont en nombre ∞^{77}, elles découpent sur la courbe E' une série linéaire d'ordre 54, non spéciale, par conséquent de dimension 35. Par suite, il existe 42 hyperquadriques linéairement indépendantes de S_{11} passant par la courbe E' et il ne peut y en avoir plus. On en conclut $\delta = 0$.

Le système 6-canonique complet de Φ_3 est donc découpé par les hyperquadriques. Il existe donc une hyperquadrique touchant Φ_3 le long de chacune des courbes E'_1, E'_{21}, E'_{22}, interprétation géométrique des relations fonctionnelles (1), (2) et (3).

7. Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ les coordonnées non homogènes des points de S_{12} et par $\varphi_1 = 0$, $\varphi_{21} = 0$, $\varphi_{22} = 0$ les équations des hyperquadriques touchant Φ_3 respectivement le long d'une courbe E'_1, E'_{21}, E'_{22}.

Aux équations de la surface Φ_3 dans S_{12}, adjoignons l'équation

$$x^2 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{12}), \tag{4}$$

nous obtenons dans un espace S_{13} les équations d'une surface transformée birationnelle de la surface F; c'est en effet une surface double ayant comme points de diramation les points $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{28}$ de F. La surface obtenue n'est d'ailleurs autre qu'une projection de la surface F_3 sur S_{13}.

Aux équations de la surface Φ_3 dans S_{12}, adjoignons maintenant l'équation

$$x'^2 = \varphi_{21}(x_1, x_2, \ldots, x_{12}). \tag{5}$$

Nous obtenons dans un espace S'_{13} une surface Ψ_1, transformée rationnelle de la surface Φ_3, les points de diramation étant les points $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{12}$.

Enfin, si aux équations de Φ_3 dans S_{12}, nous adjoignons l'équation

$$x''^2 = \varphi_{22}(x_1, x_2, \ldots, x_{12}), \tag{6}$$

nous obtenons dans un espace S''_{13}, une surface Ψ_2, transformée rationnelle de la surface Φ_3, les points de diramation étant $P'_{13}, P'_{14}, \ldots, P'_{28}$.

Les surfaces Ψ_1 et Ψ_2 sont liées par une correspondance (2, 2) deux points homologues correspondant à un même point de Φ_3. Désignons par Ψ la surface dont les points représentent les couples de points homologues dans cette correspondance. Dans l'espace S_{14}, formé par la réunion des espaces S'_{13}, S''_{13}, les équations de Ψ sont les équations (5) et (6) jointes aux équations de la surface Φ_3 dans l'espace S_{12}.

La surface Ψ contient, trois transformations birationnelles en elle-même :

La transformation T_1 qui fait correspondre au point (x, x', x''), le point $(x, -x', x'')$, x représentant l'ensemble des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ d'un point de Φ_3.

La transformation T_2 qui fait correspondre au point (x, x', x'') le point $(x, x', -x'')$.

La transformation T_0 qui fait correspondre le point $(x, -x', -x'')$ au point (x, x', x''). On a d'ailleurs

$$T_0 = T_1 T_2 = T_2 T_1.$$

Posons $x = x' x''$ et considérons l'équation

$$x^2 = \varphi_{21} \varphi_{22}.$$

Jointe à celles de Φ_3 dans S_{12}, cette équation représente une transformée rationnelle de Φ_3 ayant pour points de diramation les points $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{28}$, car la surface $\varphi_{21} \varphi_{22} = 0$ touche Φ_3 en chaque point d'intersection. Cette nouvelle surface n'est autre qu'une projection de la surface F_3 sur l'espace S_{14} et F_3 est donc une image de l'involution engendrée par T_0 sur Ψ.

8. Nous allons étudier de plus près les surfaces Ψ_1, Ψ_2, Ψ.

La surface Ψ_1 contient une involution I_1 du second ordre ayant pour image la surface Φ_3, les points de diramation étant $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{12}$. Aux courbes E', E'_{21} correspondent sur la surface Ψ_1 des courbes G_{10}, G_{11} appartenant à un même système linéaire $|G_1|$. Les courbes G_1 ont le degré 54 et le genre 37. Si r est la dimension du système $|G_1|$, rapportons projectivement les courbes G_1 aux hyperplans d'un espace S_r à r dimensions. Il correspond à Ψ_1 une surface que nous désignerons toujours par Ψ_1, d'ordre 54, sur laquelle l'involution I_1 est déterminée par une homographie H possédant deux axes ponctuels ξ_{10}, ξ_{11} de dimensions respectives 12 et 9, les hyperplans passant par le second de ces axes découpant les courbes G_{10} et ceux passant par le premier, les courbes G_{11}. Il en résulte, d'après la théorie des homographies, qu'on a $r = 22$.

Aux courbes E'_{22} correspondent sur Ψ des courbes G_{12} d'ordre 54, de degré 38 et de genre 29.

Aux points doubles $P'_{13}, P'_{14}, \ldots, P'_{28}$ de Φ_3 correspondent 32 points doubles coniques de Ψ_1, car les courbes E' et E'_{21} passant par le point P'_{13} par exemple y ont un point double. Nous désignerons par A'_i, A''_i les points doubles qui correspondent au point P'_i et par α'_i, α''_i les courbes rationnelles de degré virtuel -2 équivalentes à ces points ($i = 13, 14, \ldots, 28$).

Les courbes G_{12} passent par les points $A'_{13}, A''_{13}, A'_{14}, \ldots, A''_{14}, A'_{28}, A''_{28}$ et satisfont à la relation fonctionnelle

$$2G_1 \equiv 2G_{12} + \alpha'_{13} + \alpha''_{13} + \alpha'_{14}\alpha''_{14} + \ldots + \alpha'_{28} + \alpha''_{28}, \tag{7}$$

conséquence de la relation (3).

Rappelons que nous avons établi que si une surface F de genre arithmétique p_a contient une involution du second ordre de genre arithmétique p'_a ayant k points unis, nous avons

$$12(p_a + 1) = 24(p'_a + 1) - 3k.$$

Appliquons cette formule au cas actuel. Nous avons $p'_a = 3$, $k = 12$, donc le genre arithmétique p_a de Ψ_1 est $p_a = 4$.

Désignons par $|L_1|$ le système canonique de Ψ_1 et par r sa dimension. Le système $|L_1|$ contient au plus deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_1. L'un, qui existe certainement, est un réseau contenant les transformées des courbes canoniques Γ de Φ_3. L'autre, qui peut ne pas exister, contient des courbes passant par les 12 points unis de I_1. A ses courbes correspondent sur Φ_3 des courbes L'_1 telles que

$$2\Gamma \equiv 2L'_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{12}.$$

La courbe L'_1 existe et coïncide avec la courbe Γ_1. Elle est isolée et, d'après la théorie des homographies, on a $r = 3$. Le genre géométrique de Ψ_1 est, par conséquent, $p_g = 4$ et la surface est régulière.

La surface Ψ_1 a les genres $p_a = p_g = 4$, $p^{(1)} = 7$.

La formule de Zeuthen donne, en effet, 7 pour le genre de la courbe L_1.

9. La surface Ψ_2 contient une involution I_2 d'ordre 2, possédant 16 points unis, dont Φ_3 est une surface image.

Aux courbes E' correspondent sur Ψ_2 des courbes G_{20} et aux courbes E'_{22} des courbes G_{21} appartenant à un même système linéaire $|G_2|$. Le système $|G_2|$ a le degré 54 et le genre 37. Comme les systèmes $|G_{20}|$ et $|G_{21}|$ ont respectivement les dimensions 12 et 8, le système $|G_2|$ a la dimension 21. On peut prendre pour surface Ψ_2 une surface de l'espace S_{21} dont les sections hyperplanes sont les courbes G_2.

Aux courbes E'_{21} correspondent sur Ψ_2 des courbes G_{22} d'ordre 54 et de genre 31, formant un système linéaire de degré 42. Aux points doubles $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{12}$ correspondent des couples de points doubles coniques que nous désignerons par $A'_1, A''_1, A'_2, A''_2, \ldots, A'_{12}, A''_{12}$. Soient $\alpha'_1, \alpha''_1, \ldots, \alpha'_{12}, \alpha''_{12}$ les courbes rationnelles de degré virtuel -2 équivalentes à ces points. A la relation fonctionnelle (2) correspond la relation fonctionnelle

$$(8) \qquad 2G_2 \equiv 2G_{22} + \alpha'_1 + \alpha''_1 + \alpha'_2 + \alpha''_2 + \ldots + \alpha'_{12} + \alpha''_{12}.$$

Le calcul du genre arithmétique p_a de Ψ_2 ($p'_a = 3, k = 12$) donne $p_a = 3$.

Le système canonique $|L_2|$ de Ψ_2 contient les transformées des courbes canoniques Γ de Φ_3. Dans $|L_2|$, la transformation birationnelle de Ψ_2 en soi génératrice de l'involution I_2 opère comme une homographie. Si $|L_2|$ n'appartient pas à l'involution I_2 il existe dans ce système des courbes passant par les 16 points unis de l'involution, appartenant à celle-ci. Il leur correspond sur la surface Φ_3 des courbes L'_2 telles qu'on ait

$$2\Gamma \equiv 2L'_2 + \gamma_{13} + \gamma_{14} + \ldots + \gamma_{28}.$$

De telles courbes n'existent pas, car il leur correspondrait sur la surface Φ_2 des courbes le long desquelles un hyperplan toucherait la surface et passerait par 16 points doubles de celle-ci, ce qui est impossible. Il en résulte que le système canonique de Ψ_2 est un réseau appartenant à l'involution I_2.

Les courbes L_2 sont de genre 7.

La surface Ψ_2 *a les genres* $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 7$.

10. La surface Ψ est transformée en soi par trois transformations birationnelles involutives $T_1, T_2, T_0 = T_1 T_2 = T_2 T_1$ formant un groupe trirectangle. La première engendre une involution I'_1 ayant Ψ_1 comme surface image, la seconde une involution I'_2 ayant Ψ_2 comme image, enfin la troisième engendre une involution I_0 ayant F comme image.

Aux courbes G_1, G_{12} de Ψ_1 correspondent sur Ψ des courbes G'_1, G'_{12} appartenant à un même système linéaire. De même, aux courbes G_2, G_{22} de Ψ_2 correspondent sur Ψ des courbes G'_1, G'_{22} appartenant à un même système linéaire. Observons que dans la correspondance (1, 4) existant entre Φ_3 et Ψ, aux courbes E' correspondent les courbes G'_1 et G'_2, donc ces courbes coïncident. Il existe, par suite, sur Ψ un système linéaire $|G|$ contenant les courbes G'_1, G'_{12}, G'_2, G'_{22}. Ce système a le degré 108, le genre 73 et la dimension 31.

Si l'involution I_0 possédait un point uni, T_1 et T_2 lui feraient correspondre un même point qui serait également uni pour I_0. Donc, pour que I_0 ait des points unis, il faut que I'_1 et I'_2 aient des couples communs. A un tel couple correspondrait sur Φ_3 un point qui serait de diramation à la fois pour la correspondance entre Φ_3 et Ψ_1 et pour la correspondance entre Φ_3 et Ψ_2. De tels points ne peuvent exister et, par conséquent, I_0 est dépourvue de points unis.

On peut calculer le genre arithmétique de Ψ en utilisant l'une quelconque des involutions I'_1, I'_2, I_0. Dans chaque cas on trouve $p_a = 1$.

Soit $|L|$ le système canonique de Ψ; il contient les transformées des courbes canoniques L_1 de Ψ_1 et L_2 de Ψ_2. Il a, par conséquent, le degré 12 et le genre 13. Soient L_0 les transformées des courbes L_1; le système $|L_0|$ a la dimension 3. Si la dimension de $|L|$ est $r > 3$, il existe dans ce système un système partiel $|L'|$ appartenant à l'involution I'_1 et dont les courbes passent par les 32 points unis de cette involution. Si x est le genre des courbes qui correspondent sur Ψ_1 aux courbes L', la formule de Zeuthen donne $x = -1$, ce qui est absurbe. On a donc $r = 3$ et le système canonique de Ψ appartient à l'involution I'_1.

Si l'on répète le même raisonnement en utilisant l'involution I'_2, on trouve cette fois une courbe L isolée, passant par les 24 points unis de l'involution, appartenant à celle-ci. Il lui correspond sur Ψ_2 la courbe elliptique transformée de la courbe Γ_1 passant par les points $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{12}$.

La surface Ψ *a les genres* $p_a = 1$, $p_g = 4$, $p^{(1)} = 13$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

La surface représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe de genre 3 à modules généraux est l'image d'une involution d'ordre 2 privée de points unis appartenant à une surface de genres $p_a = 1$, $p_g = 4$, $p^{(1)} = 13$.

Remarquons que la surface irrégulière Ψ contient deux involutions régulières I'_1, I'_2 possédant des points unis. Le même raisonnement peut montrer que Ψ est l'image d'une involution d'ordre 2 privée de points unis appartenant à une surface irrégulière. Et ainsi de suite.

(Manuscrit reçu le 12 août 1961.)