Dai « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei »
(Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali)
serie VIII, vol. XIX, fasc. 5 – Novembre 1955

Geometria. — *Il teorema di Picard sulla regolarità del sistema aggiunto.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata(*) dal Socio B. SEGRE.

E. Picard ha dimostrato, come egli dice « par une voie détournée », la regolarità del sistema aggiunto alle sezioni piane di una superficie algebrica (1). Poco dopo, F. Severi ha dato una dimostrazione geometrica di un teorema più generale: la regolarità del sistema aggiunto ad una curva irriducibile atta a definire un sistema continuo di grado maggiore di uno (2).

Il teorema di Picard è equivalente alla seguente proprietà: la serie tagliata sulla generica C dalle aggiunte C′ ad un sistema lineare $|C|$, almeno ∞^1, ha la deficienza $q = p_g - p_a$. Vogliamo dare qui una dimostrazione di questo teorema facente uso soltanto della teoria dei sistemi lineari di curve (3).

Consideriamo una superficie algebrica F dello spazio ordinario, dotata di singolarità normali (curva doppia nodale con punti tripli per la superficie e per la curva doppia); siano p_g il genere geometrico, p_a il genere aritmetico e $q = p_g - p_a$ l'irregolarità di F. Diciamo $|C_1|$ il sistema delle sezioni piane e $|D| = |hC_1|$ il sistema delle curve tagliate su F dalle superficie di ordine h. Sia inoltre $|C|$ un sistema lineare infinito le cui curve C tagliano le curve D in un numero $m > 0$ di punti.

È classico il seguente risultato (4):

Si può scegliere h abbastanza grande per guisa che:

1° *L'aggiunto* $|D'|$ *di* $|D|$ *tagli sopra una generica curva* D *una serie di deficienza* q;

2° *L'aggiunto* $|(C+D)'|$ *di* $|C+D|$ *tagli sopra una generica curva* $C+D$ *irriducibile una serie di deficienza* $q = p_g - p_a$;

3° *L'aggiunto* $|(C+D)'|$ *di* $|C+D|$ *tagli sopra una generica curva* C *una serie completa.*

(*) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) PICARD, *Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (« Journal de Crelle », 1905, Bd. 129, pp. 275–286); PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, Paris 1906, tome II, p. 437.

(2) SEVERI, *Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica* (« Rendiconti della Accademia dei Lincei », 2º sem., 1908, pp. 465–470).

(3) Comunicata oralmente al V Congresso dell'Unione Matematica Italiana a Pavia (6–11 ottobre 1955).

(4) G. CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica* (« Annali di Matematica », 1897, ser. 2, XXV); *Memorie Scelte*, Bologna 1937. Ved. il cap. II. Abbiamo ripreso la dimostrazione di questo teorema nella Nota *Remarques sur les systèmes linéaires de courbes tracées sur une surface algébrique et sur un théorème de Picard* (« Bull. de l'Acad. roy. de Belgique », 1947, pp. 403–410).

Il sistema $|(C+D)'|$ ha allora la dimensione

$$p_a + \pi + \pi_0 + m - 2,$$

dove π è il genere delle curve C e π_0 quello delle curve D. Questo sistema taglia sopra una curva C una serie completa, di ordine $m + 2\pi - 2$, certamente non speciale poiché $m > 0$. Le curve del sistema $|(C + D)'|$ passanti per i punti di un gruppo (C , D) intersezione di una C e di una D tagliano, sopra la curva C, la serie canonica completa. Il passaggio di una curva $(C + D)'$ per un gruppo (C , D) impone dunque $m - 1$ condizioni a questa curva.

Consideriamo il sistema lineare delle curve $(C + D)'$ passanti per il gruppo $(\bar{C}, \bar{D})$ comune ad una curva generica $\bar{C}$ di $|C|$ ed ad una generica curva $\bar{D}$ di $|D|$. Questo sistema ha la dimensione $p_a + \pi_0 + \pi - 1$. Fra le curve di questo sistema, ve ne sono che contengono le curve $\bar{C}$ e $\bar{D}$; esse sono completate dalle curve canoniche di F. Dunque, esiste nel sistema $|(C + D)'|$ un sistema lineare di curve, che diremo $|K|$, passanti per il gruppo $(\bar{C}, \bar{D})$, ma non contenenti generalmente come parte una curva canonica; il sistema $|K|$ ha infatti la dimensione $\pi + \pi_0 - q - 1$, e questa risulta maggiore di $p_g - 1$ non appena h sia sufficientemente grande.

Fra le curve K, vi sono curve spezzate nella curva $\bar{D}$ ed in curve C' che non contengono $\bar{C}$ come parte, e curve spezzate nella curva $\bar{C}$ ed in curve D' che non contengono $\bar{D}$ come parte.

Diciamo $|G_0|$ la serie di gruppi canonici di $\bar{D}$, di dimensione $\pi_0 - q - 1$, tagliata dalle aggiunte D' a $\bar{D}$ e $|G|$ la serie di gruppi canonici di $\bar{C}$ tagliata dalle aggiunte C' a $\bar{C}$. Questa serie ha una certa deficienza $\delta \leq q$ e quindi la dimensione $\pi - \delta - 1$.

Consideriamo $\pi_0 - 1$ punti generici della curva $\bar{D}$, che quindi non appartengono ad un gruppo G_0; essi appartengono ad un determinato gruppo canonico γ di $\bar{D}$. *A priori*, le curve K che passano per tali punti non contengono necessariamente gli altri punti del gruppo γ. Supponiamo che il passaggio per il gruppo γ imponga $\pi_0 - 1 + k$ condizioni alle curve K $(k \geq 0)$. Allora le curve K passanti per γ formano un sistema lineare, H, di dimensione $\pi - q - k$.

Le curve K che passano per un ulteriore punto di $\bar{D}$ contengono la curva $\bar{D}$ come parte e sono pertanto completate dalle curve C' aggiunte a $\bar{C}$, le quali formano un sistema di dimensione $\pi - \delta - 1$. Si ha quindi

$$\pi - q - k - 1 = \pi - \delta - 1,$$

cioè $\delta = q + k$. Poiché $\delta \leq q$, $k \geq 0$, risulta $k = 0$ e $\delta = q$, sicché

Sopra la generica curva C, *le aggiunte* C' *tagliano una serie di deficienza*

$$q = p_g - p_a.$$

Così è dimostrato il teorema di Picard, senza uscire dalla geometria dei sistemi lineari.

Roma, 1955. - Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei.