Sur certaines surfaces multiples n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation.

Memoria di Lucien Godeaux (a Liegi).

Résumé. - *On étudie la structure des points unis d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique et celle des points de diramation correspondants d'une surface image de l'involution.*

Dans un mémoire en cours de publication dans les *Annales de l'Ecole Normale Supérieure* [1], nous avons développé une méthode pour déterminer la structure des points unis isolés d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique. Soit F nne surface algébrique transformée en soi par une transformation birationnelle T, de période p. Cette transformation engendre sur F une involution I_p. Nous supposons qne cette involution ne possède qu'un nombre fini de points unis et que $p = 2\xi + 1$ est un nombre premier. Soit A un point uni de l'involution, simple pour la surface F. Dans le faisceau des tangentes à F en A, la transformation T détermine une homographie de période p. Laissons le coté le cas où cette homographie se réduit à l'identité (points unis parfaits). Les équations de l'homographie peuvent alors s'écrire sous le forme

$$y' : z' = y : \varepsilon^k z,$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité et k un entier compris entre 1 et p. La structure du point uni A, c'est-à-dire l'ensemble des points fictifs, unis pour T, appartenant aux différents domaines du point A, dépend de l'entier k.

Considérons une surface normale Φ, image de l'involution I_p, sur laquelle aux points unis correspondent des points isolés; ce sont les points de diramation. Ceux-ci sont singuliers pour la surface Φ et la connaissance de la structure du point uni A entraine celle de la singularité de Φ au point de diramation homologue.

---

[1] Un résumé de ce mémoire a été publié aux C. R. de l'Académie des Scie ces, séance du 19 juillet 1948.

Nous avons résumé nos recherches antérieures sur les involutions dans un exposé: *Les involutions cycliques appartenent à une surface algébrique*, « Actualités scient. », n. 270, Paris, Hermann, 1935.

Dans ce travail, après avoir rappelé succinctement notre méthode, nous étudierons le cas où l'on a $k = \xi + 1$. Notre but est de déterminer la structure du point de diramation. Nous parvenons au résultat suivant:

Si une involution cyclique d'ordre premier $p = 2\xi + 1$ *appartenant à une surface algébrique, possède un point uni tel que dans le faisceau des tangentes à la surface en ce point, l'involution détermine une homographie dont l'invariant projectif est* $\xi + 1$, *le point de diramation correspondant sur une surface image da l'involution est:*

1.° *Si* $\xi = 3\eta$, *un point multiple d'ordre* $\eta + 2$, *le cône tangent en ce point à la surface étant formé d'un plan, d'un cône rationnel d'ordre* $\eta - 1$ *et d'une cône du second ordre. Le plan et le cône du second ordre ne se rencontrent pas mais rencontrent le cône d'ordre* $\eta - 1$ *chacun suivant une droite;*

2.° *Si* $\xi = 3\eta + 2$, *un point multiple d'ordre* $\eta + 2$, *le cône tangent en ce point à la surface étant formé de deux plans et d'un cône d'ordre* η. *Les deux plans ne se rencontrent pas mais rencontrent le cône d'ordre* η *chacun suivant une droite. Sur l'une de ces droites, la surface possède un point double conique dans le domaine du premier ordre du point singulier.*

Dans chaque cas, nous coustruisons une surface contenant une involution n'ayant qu'un nombre fini de points unis, tous de l'une des espèces étudiées.

Qu'il nous soit permis de rappeler que le point de départ de nos recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique fut l'étude du beau *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (²) de F. ENRIQUES et M. F. SEVERI (Prix Bordin, 1907), au cours d'un sejour que nous fîmes à Bologne, en 1912, près du premier de ces géomètres. Nous évoquons ce souvenir, aujourd'hui que M. F. SEVERI compte un demi-siècle d'activitè scientifique, pendant lequel ses travaux ont jeté un vif éclat sur la superbe Ecole Italienne de Géométrie.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p d'ordre premier $p = 2\xi + 1$, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous avons montré que l'on peut prendre, pour modèle projectif de cette surface, une surface F, normale dans un espace linéaire S_r à r dimensions, sur laquelle l'involution I_p est déterminée par une homographie cycliqne H de S_r ayant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}$, dont le premier seul rencontre F, aux points unis de l'involution (³). Ou peut d'ailleurs supposer que r et la dimension r_0 de σ_0, sont des nombres aussi grands que l'on veut.

En projetant sur σ_0 la surface F de l'espace de dimension minimum contenant $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}$, il correspond aux groupes de l'involution I_p les points d'une surface normale Φ, image de l'involution. Les points de diramation de cette surface coincident en position avec les points unis de I_p sur F.

(²) « Acta Mathematica », 1909, tomes XXXII et XXXIII.

(³) *Les involution cycliques...* (loc. cit.).

Le systéme linèaire $|C|$ des sections hyperplanes de F contient p systèmes linéaires partiels $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I_p. Le système $|C_i|$ est découpé par les hyperplans passant par les axes $\sigma_0, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{p-1}$ de l'homographie H. Le système linéaire $|C_0|$ est dépourvu de poiuts-base et les systèms $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{p-1}|$ ont pour points-base les points unis de l'involution.

Aux systèmes linéaires $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{p-1}|$ correspondent sur Φ des systèmes linéaires complets $|\Gamma_0|, |\Gamma_1|, \ldots, |\Gamma_{p-1}|$. Les courbes Γ_0 sont les sections hyperplanes de Φ.

Désignons par n l'ordre de Φ et par π le genre des courbes Γ_0. D'après la formule de Zeuthen, le genre des courbes C_0 et par conséquence des courbes C est $p(\pi-1)+1$. D'autre part, le degré de $|C_0|$ et par suite de $|C|$, c'est-à-dire l'ordre de la surface F, est égal à pn.

Sur la surface Φ, les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p-1}$ sont d'ordre n.

2. Soit A uu point uni de l'involution I_p. Ce point appartient donc à σ_0 et nous supposerons que le plan tangent α à F en A n'a que ce point en commun avec σ_0.

Le plan α est uni pour l'homographie H et s'appuie soit suivant une droite sur l'un des axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$, soit suivant des points sur deux de ces axes. Dans le premier cas, le point A est uni parfait pour l'involution;

A chacun des axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ de H, on peut attacher une racine d'ordre p de l'unité. D'une manière précise, si ε ast une racine primitive d'ordre p de l'unité, nous attacherons aux espaces $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ respectivement les nombres $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{p-1}$.

Nous étudierons le point uni A dans l'hypothèse où le plan α s'appuie en des points sur deux des axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$. On peut toujours, par un changement de notation, supposer que l'un de ces axes est σ_1. Nous ferous l'hypothèse que l'autre axe est $\sigma_{\xi+2}$.

Les hyperplans découpant les courbes C_1 sur F rencontrent le plan α suivant une droite $a_{\xi+2}$ passant par A et par le point d'appui de α sur $\alpha_{\xi+2}$, Les courbes C_1 ont un point simple en A et y touchent cette droite.

Les hyperplans découpant sur F les courbes $C_{\xi+2}$ rencontrent le plan α suivant la droite a_1 passant par A et par le point d'appui de α sur σ_1. Les courbes $C_{\xi+2}$ ont un point simple en A et touchent la droite a_1 en ce point.

3. Appelons C_0' les courbes C_0 passant par A; elles y ont une multiplicité d'ordre inférieur à p, les tangentes étant confondues avec les droites $a_1, a_{\xi+2}$.

Soient C_0'' les courbes C_0' assujetties à toucher en A une droite distincte de $a_1, a_{\xi+2}$. Ces courbes ont en A une multiplicité égale ou inférieure à p. Dans le premier cas, les courbes C_0'' ont en A des tangentes variables; dans le second les tangentes en A sont confondues avec a_1, $a_{\xi+2}$. Dans cette seconde hypothèse, nous appellerons C_0''' les courbes C_0'' assujetties à toucher en A une droite distincte de a_1, $a_{\xi+2}$. Et ainsi de suite.

Nous formons ainsi une suite de systèmes linéaires

$$|C_0|,\ |C_0''|, \ldots,\ |C_0^{(\nu)}|,$$

de dimensions $r_0 - 1$, $r_0 - 2, \ldots$, $r_0 - \nu$ dont les courbes ont en A des multiplicités croissantes. D'une manière précise, les courbes $C_0^{(\nu)}$ ont en A la multiplicité p et des tangentes variables; les courbes C_0', $C_0'', \ldots$, $C_0^{(\nu-1)}$ on en A des multiplicités inférieures à p, les tangentes en ce point étant confondues avec les droites a_1, $a_{\xi+2}$.

Supposons que les courbes $C_0^{(i)}$ $(i < \nu)$ aient en A la multiplicité $\lambda + \mu$, λ tangentes étant confondues avec $a_{\xi+2}$ et μ avec a_1. Nous avons montré que l'on a

$$\lambda + \mu(\xi + 2) \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p).$$

Réciproquement, si λ et μ sont des entiers positifs dont la somme est inférieure à p, satisfaisant à la congruence précédente, il y a un des systèmes $|C_0'|$, $|C_0''|, \ldots$, $|C_0^{(\nu-1)}|$ dont les courbes ont en A la multiplicité $\lambda + \mu$, λ tangentes étant confondues avec $a_{\xi+2}$ et μ avec a_1.

Nous avons en outre établi que chacune des courbes C_1, $C_{\xi+2}$ rencontrent les courbes C_0', $C_0'', \ldots$, $C_0^{(\nu)}$ en p points confondus en A.

4. Les courbes C_1 ont en commun un certain nombre de points fixes B_1 B_2, $B_2, \ldots$, B_y infiniment voisins successifs de A, le premier appartenant à la droite $a_{\xi+2}$. Ces points sont unis non parfaits pour l'involution, sauf le dernier qui est uni parfait.

De même, les courbes $C_{\xi+2}$ ont en commun un certain nombre de points fixes A_1. $A_2, \ldots$, A_x infiniment voisins successifs de A, le premier appartenant à la droite a_1. Ces points sont unis non parfaits pour l'involution, sauf le dernier qui est uni parfait.

Sur une courbe $C_0^{(i)}$, le point A est l'origine de différentes branches qui ont en commun des suites de points fixes infiniment voisins successifs de A_1 et de B_1, unis non parfaits pour I_p, sauf les derniers, qui sont unis parfaits.

Considérons en particulier les courbes C_0'. Elles passent nécessairement par les points A_1, $A_2 \ldots$, A_x, B_1, B_2, $B_2, \ldots$, B_y et ont éventuellement en commun d'autres suites de points fixes infiniment voisins successifs de A. Appelons Γ_0' les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C_0'; elles sont découpées par les hyperplans de σ_0 passant par A. Projetons Φ de A sur un hyperplan de σ_0; nous obtenons une surface Φ_1 dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ_0'.

Aux domaines des points unis parfaits de l'entourage de A. communs à toutes les courbes C_0', et notamment aux points A_x, B_y, correspondent sur Φ_1

des courbes rationnelles. Les projections de ces courbes rationnelles à partir de A donnent le cône tangent à la surface Φ en ce point. La structure du point de diramation A revient donc à la détermination des courbes rationnelles en question et d'autres courbes qui peuvent être amenées par la considération des courbes Γ_0'', Γ_0''', ... qui correspondent respectivement sur Φ et Φ_1 aux courbes C_0'' C_0''', ...

5. Nous avons tout d'abord à résoudre la congruence

$$\lambda + \mu(\xi + 2) \equiv 0. \qquad (\text{mod. } 2\xi + 1).$$

Une solution s'aperçoit immédiatement:

$$\lambda = \xi - 3i + 1, \qquad \mu = 2i - 1. \qquad (i = 1, 2, ...).$$

On doit $\lambda > 0$, avoir donc

$$3i < \xi + 2.$$

Nous sommes donc conduit à considérer le reste de ξ par rapport à 3. Observons que l'on ne peut avoir $\xi = 3\eta + 1$, car alors $p = 2\xi + 1 = 6\eta + 3$ ne serait pas premier, contrairement à l'hypothèse.

Supposons $\xi = 3\eta$. Les solutions de la congruence, pour lesquelles $\lambda + \mu < p$, sont

$$\lambda = 2 + 3i, \qquad \mu = 2\eta - 2i - 1, \quad (i = 0, 1, ..., \eta - 1);$$
$$\lambda = 1 + 3i, \qquad \mu = 4\eta - 2i, \qquad (i = 0, 1, ..., 2\eta - 1).$$

Si au contraire nous supposons $\xi = 3\eta + 2$, les solutions de la congruence sont

$$\lambda = 1 + 3i, \qquad \mu = 2\eta - 2i + 1, \qquad (i = 0, 1, ..., \eta),$$
$$\lambda = 2 + 3i, \qquad \mu = 4\eta - 2i + 2, \qquad (i = 0, 1, ..., 2\eta).$$

Nous aurons donc à examiner deux cas suivant que

$$p = 6\eta + 1 \qquad \text{ou} \qquad p = 6\eta + 5.$$

6. Avant de faire cette étude, nous considèrerons le système $|C_0^{(\nu-1)}|$, qui est le même dans les deux cas.

Ce système est obtenu en faisant

$$\lambda = 2\xi - 2, \qquad \mu = 2.$$

Les courbes $C_0^{(\nu-1)}$ ont en A la multiplicité $2\xi = p - 1$, 2 tangentes en ce point étant confond es avec a_1 et $2\xi - 2$ avec $a_{\xi+2}$. Puisque les courbes C_1, $C_{\xi+2}$ rencontrent les courbes $C_0^{(\nu-1)}$ en p points confondus en A, les courbes $C_0^{(\nu-1)}$ passent simplement par les points A_1, B_1, mais ne peuvent passer par les points A_2, B_2.

Projetons la surface F du point A sur un hyperplan passant par $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{p-1}$, mais non par A. Nous obtenons une surface F', transformée en soi par H.

Au domaine du point A correspond sur F' une droite a' passant par le point A'_1 d'appui de α sur σ_1 et par le point $A'_{\xi+2}$ d'appui de α sur $\sigma_{\xi+2}$.

Aux courbes $C_0^{(\nu-1)}$ correspondent sur F' des courbes passant simplement par A_1' en y touchant la droite a' et simplement par $A'_{\xi+2}$ et y ayant un contact d'ordre $2\xi - 3$ avec la droite a'.

Sur une courbe $C_0^{(\nu-1)}$, le point A est donc l'origine de deux branches superlinéaires. Ces courbes passent simplement par un point [1] $A(1, 1)$ infiniment voisin de A_1 et distinct de A_2, et par une suite de $2\xi - 3$ points $A(1, 1)$, $B(1, 2), \ldots, B(1, 2\xi - 3)$ infiniment voisins successifs de B_1. Ces points sont unis pour l'involution et les deux points $A(1, 1)$, $B(1, 2\xi - 3)$ sont unis parfaits.

Le point A absorbe $2\xi p$ points de l'intersection de deux courbes $C_0^{(\nu-1)}$. Le système $|C_0^{(\nu-1)}|$ a donc le degré $p(n - 2\xi)$ et sur Φ, le système $|\Gamma_0^{(\nu-1)}|$ a le degré $n - 2\xi$.

Une courbe $C_0^{(\nu-1)}$ a le genre $p(\pi - 1) + 1 - \xi(2\xi - 1)$ et sur cette courbe, l'involution déterminée par I_p possède deux points unis, donc, d'après la formule de ZEUTHEN, les courbes $\Gamma_0^{(\nu-1)}$ on le genre $\pi - \xi$.

Observons que si l'on rapporte prajectivement les courbes $C_0^{(\nu-1)}$ aux hyperplans d'un espace linéaire à $r_0 - \nu + 1$ dimensions, on obtient une surface $\Phi_{\nu-1}$, image de l'involution, sur laquelle aux domaines des points $A(1, 1)$, $B(1, 2\xi - 3)$ correspondent deux droites respectivement $\alpha_1^{(\nu-1)}$, $\beta_1^{(\nu-1)}$.

Aux courbes $C_0^{(\nu)}$, qui ont un point multiple d'ordre p à tangentes variables en A, correspondent sur $\Phi_{\nu-1}$ des courbes $\Gamma_0^{(\nu)}$ formant un système linéaire de degré $n - p$ et de genre $\pi - \xi$, car sur une courbe $C_0^{(\nu)}$, I_p détermine une involution privée de points unis, les points infiniment voisins de A sur une telle courbe formant un groupe de l'involution. Les courbes $\Gamma_0^{(\nu)}$ ne peuvent rencontrer les droites $\alpha_1^{(\nu-1)}$, $\beta_1^{(\nu-1)}$, donc elles sont découpées sur $\Phi_{\nu-1}$ par les hyperplans passant par un point, simple pour la surface, commun aux deux droites.

On a d'ailleurs $\nu = \xi + 1$.

1. Etude du cas $p = 6\eta + 1$.

7. Dans l'hypothèse $p = 6\eta + 1$, les courbes C_0' sont données par $\lambda = 2$, $\mu = 2\eta - 1$; elles ont donc en A la multiplicité $2\eta + 1$, 2 tangentes étant confondues avec $a_{\xi+2}$ et $2\eta - 1$ avec a_1.

Les courbes C_0' passent au plus 2 fois et au moins une fois par B_1; si elles passaient une fois par ce point, elles devraient passer une fois par $B(1, 1)$ et ce point devrait être uni parfait pour l'involution. On aurait alors $2\xi - 3 = 1$, $\xi = 2$, ce qui est impossible, puisque $\xi = 3\eta$. Donc B_1 est double pour les courbes C_0'.

---

[1] Nous écrivons $A(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ de préférence à $A_{\alpha\beta\gamma\ldots}$.

Le nombre des points d'intersection d'une courbe C_0' et d'une courbe $C_0^{(\nu-1)}$ doit être multiple de p. Si x_1 et x_2 sont les multiplicités de A_1, $A(1, 1)$ pour les courbes C_0', on a

$$x_1 + x_2 = 2\eta - 1$$

et, puisque $x_2 \leq x_1$, $x_1 = \eta$, $x_2 = \eta - 1$.

Les courbes C_0' passent donc η fois par A_1, $\eta - 1$ fois par $A(1, 1)$ et, nécessairement, une fois par les 3η points $A_2, A_3, \ldots, A_{3\eta+1}$. On a donc $x = 3\eta + 1$.

Les courbes C_0' passent nécessairement par les points $B_1, B_2, \ldots B_y$ et les premiers de ces points sont doubles pour ces courbes. S'il existait un point B_t simple pour les courbes C_0', celles-ci passeraient simplement par un point infiniment voisin de B_t, distinct de B_{t+1} et ne passeraient pas par ce dernier point. On a donc $y = 2\eta$ et les courbes C_0' passent doublement par les points $B_1\ B_2, \ldots, B_{2\eta}$.

Le système C_0' a le degrè $p(n - \eta - 2)$ et le genre $p(\pi - 1) + 1 - (3\eta^2 + \eta + 1)$. Par conséquent, le système (Γ_0') a le degré $n - (\eta + 2)$ et, d'après la formule de Zeuthen, le genre $\pi - (\eta + 1)$.

Aux domaines des points unis parfaits $A(1, 1)$, $A_{3\eta+1}$, $B_{2\eta}$ correspondent sur la suface Φ_1 respectivement une courbe rationnelle $\alpha_{\eta-1}$ d'ordre $\eta - 1$, une droite α_1 et une conique β_2. Le point A est donc multiple d'ordre $\eta + 2$ pour la surface Φ, le cône tangent se composant d'un cône d'ordre $\eta - 1$, d'un plan et d'un cône du second ordre.

8. Envisageons les courbes C_0''. Elles ont en A la multiplicité $2\eta + 2$, $2\eta - 3$ tangentes étant confondues avec a_1 et 5 avec $a_{\xi+2}$. A ces courbes correspondent sur Φ_1 des courbes Γ_0'', sections de cette surface par les hyperplans passant par un point A'.

Si le point A' n'appartenait pas à la courbe $\alpha_{\eta-1}$, les courbes C_0'' passeraient $\eta - 1$ fois par $A(1, 1)$ et au moins $\eta - 1$ fois par A_1. Mais cela est impossible, car ces courbes devraient avoir au moins $2\eta - 2$ tangentes confondues avec a_1. Le point A' appartient donc à la courbe $\alpha_{\eta-1}$, le point $A(1, 1)$ est multiple d'ordre $\eta - 2$ pour les courbes C_0''. Puisqu'il y a $2\eta - 3$ tangentes à ces courbes en A confondues avec a_1, le point A_1 est multiple d'ordre $\eta - 1$ pour ces courbes et celles-ci passent simplement par les points A_2, $A_3, \ldots, A_{3\eta+1}$. Le point A' n'appartient pas à la droite α_1.

En considérant le nombre de points d'intersection des courbes C_0'', $C_0^{(\nu-1)}$ absorbés en A, en voit facilement que le point B_1 est quintuple pour les courbes C_0''.

Si le point A' n'appartenait pas à la conique β_2, le point $B_{2\eta}$ serait double pour les courbes C_0' et il y aurait plus de p points d'intersection des courbes C_0'', C_1 absorbés en A. Donc A' appartient à β_2 et le point $B_{2\eta}$ est simple pour les courbes C_0''.

Cela étant, supposons que celles-ci passent cinq fois par les x premiers des points $B_1, B_2, \ldots, B_{2\eta}$, k fois par le suivant et une fois par les points restants. On a

$$5x + k + (2\eta - x - 1) = 6\eta + 1 - (2\eta + 2),$$

c'est-à-dire

$$4x + k = 2\eta.$$

Si $\eta = 2\zeta$, on a $k = 4$ et $x = \zeta - 1$.
Si $\eta = 2\zeta + 1$, on a $k = 2$ et $x = \zeta$.

Dans le premier cas, les courbes C_0'' passant 5 fois par les $\zeta - 1$ points $B_1, B_2, \ldots, B_{\zeta-1}$, 4 fois par B_ζ et une fois par $B_{\zeta+1}, \ldots, B_{2\eta}$. Sur une de ces courbes, le point A est l'origine d'une branche superlinéaire passant par B_1, $B_2, \ldots, B_\zeta$, simplement par un point $B(\zeta, 1)$ infiniment voisin de B_ζ et par une suite de trois points $B(\zeta, 1, 1)$, $B(\zeta\ 1, 2)$, $B(\zeta, 1, 3)$ infiniment voisins successifs de $B(\zeta, 1)$. Ces points sont unis pour l'involution et le dernier est uni parfait.

Dans le second cas, les courbes C_0' passent 5 fois par ζ points $B_1, B_2, \ldots$, B_ζ, 2 fois par $B_{\zeta+1}$ et une fois par $B_{\zeta+2}, \ldots, B_{2\eta}$, Sur chacune de ces courbes, le point A est l'origine d'une branche superlinéaire passant par $B_1, B_2, \ldots$, $B_{\zeta+1}$, simplement par une suite de trois points unis $B(\zeta + 1, 1)$, $B(\zeta + 1, 2)$, $B(\zeta + 1, 3)$ infiniment voisins successifs de $B_{\zeta+1}$, et par un point uni parfait $B(\zeta + 1, 3, 1)$, infiniment voisin da $B(\zeta + 1, 3)$.

Dans les deux cas, on trouve que le système $|\Gamma_0''|$ a le degré $n - (\eta + 3)$ et le genre $\pi - (\eta + 1)$. Il en résulte que le point A' est simple pour la surface Φ_1.

9. L'étude des courbes C_0''' se fait de la même manière. Ces courbes ont en A la multiplicité $2\eta + 3$, $2\eta - 5$ tangentes étant confondues avac a_1 et 8 avec $a_{\xi+2}$.

Les courbes C_0''' passent $\eta - 2$ fois par A_1, $\eta - 3$ fois par $A(1, 1)$, une fois par $A_2, A_3, \ldots, A_{3\eta+1}$, 8 fois par $B_1, B_2, \ldots, B_x$, k fois par B_{x+1} et une fois par les points $B_{x+2}, \ldots, B_{2\eta}$.

On doit avoir

$$7x + k = 2\eta - 1.$$

Supposons $\eta = 7\zeta$; on a $x = 2\zeta - 1$, $k = 6$. Les courbes C_0''' passent 2 fois par un point $B(2\zeta, 1)$ infiniment voisin de $B_{2\zeta}$, 2 fois par un point $B(2\xi, 1, 1)$ est une fois par un point $B(2\xi, 1, 2)$ infiniment voisins successifs de $B(2\zeta, 1)$, enfin 1 fois qar un point $B(2\zeta, 1, 2, 1)$ infiniment voisin de $B(2\zeta, 1, 2)$, uni parfait pour l'involution. Nous représenterons ce comportement des courbes C_0''' par la notation

$$B^6_{2\zeta}, \qquad B^2(2\zeta, 1), \qquad B^2(2\zeta, 1, 1), \qquad B^1(\cdot\zeta, 1, 2), \qquad B^1(2\zeta, 1, 2, 1).$$

On ne peut avoir $\eta = 7\zeta + 1$, car p serait divisible par 7. Si $\eta = 7\zeta + 2$, on a $x = 2\zeta$, $k = 3$ et les courbes C_0''' on le comportement suivanti:

$$B^3_{2\zeta+1}, \quad B^2(2\zeta + 1, 2), \quad B^2(2\zeta + 1, 2), \quad B^1(2\zeta + 1, 3), \quad B^1(2\zeta + 1, 3, 1).$$

Si $\eta = 7\zeta + 3$, on a $x = 2\zeta$, $k = 5$ et le comportement

$$B^5_{2\zeta+1}, \quad B^3(2\zeta + 1, 1), \quad B^1(2\zeta + 1, 1, 1), \quad B^1(2\zeta + 1, 1, 1, 1), \quad B^1(2\zeta + 1, 1, 1, 2).$$

Si $\eta = 7\zeta + 4$, on a $x = 2\zeta$, $k = 7$ et le comportement

$$B^7_{2\zeta+1}, \quad B^1(2\zeta + 1, 1), \quad B^1(2\zeta + 1, 1, 1), \ldots, B^1(2\zeta + 1, 1, 5).$$

Si $\eta = 7\zeta + 5$, on a $x = 2\zeta + 1$, $k = 2$ et le comportement

$$B^2_{2\zeta+2}, \quad B^1(2\zeta + 2, 1), \ldots, B^1(2\zeta + 2, 6).$$

Si enfin $\eta = 7\zeta + 6$, on a $x = 2\zeta + 1$, $k = 4$ et le comportement

$$B^4_{2\zeta+2}, \quad B^3(2\zeta + 2, 2), \quad B^1(2\zeta + 2, 2), \quad B^1(2\zeta + 2, 2, 1), \quad B^1(2\zeta + 2, 2, 2).$$

Dans tous les cas, le systéme $|\Gamma_0'''|$, sur la surface Φ, a le degré $n - (\eta + 4)$ et le genre $\pi - (\eta + 1)$.

Projetons la surface Φ_1 de A' sur un hyperplan de l'espace ambiant; nous obtenons une surface Φ_2 dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ_0''. A la courbe $\alpha_{\eta-1}$ correspond sur Φ_2 une courbe d'ordre $\eta - 2$, au domaine du point A' correspond une droite β_1' et à la conique β_2, une droite. La droite β_1' est exceptionnelle et s'appuie sur $\alpha_{\eta-1}$ et β_2. Sur Φ_2, les courbes Γ_0''' sont découpées par les hyperplans passant par le point A'' de rencontre de $\alpha_{\eta-1}$ et de β_1', point qui est simple pour la surface, puisque les courbes Γ_0'' et Γ_0''' ont le même genre. On en conclut que sur Φ_1, les courbes Γ_0''' sont découpées par les hyperplans touchant la courbe $\alpha_{\eta-1}$ au point A.

On démontrerait de même que les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans osculant la courbe $\alpha_{\eta-1}$ au point A', et ainsi de suite jusqu'aux courbes $\Gamma_0^{(\eta)}$, que nous allons examiner.

10. Les caurbes $C_0^{(\eta)}$ ont en A la multiplicité 3η, une tangente étant confondue avec a_1 et $3\eta - 1$ avec $a_{\xi+2}$. Elles passent simplement par les $3\eta + 1$ points $A_1, A_2, \ldots, A_{3\eta+1}$.

En utilisant le fait que le nombre de points d'intersection de deux courbes $C_0^{(\eta)}$, $C_0^{(\nu-1)}$ absorbés en A est multiple de p, on voit que les courbes $C_0^{(\eta)}$ passent $\eta + 2$ fois par B_1, une fois par $B_2, B_3, \ldots, B_{2\eta}$, $\eta + 1$ fois par $B(1, 1)$, $\eta - 4$ fois par $B(1, 2)$, 5 fois par un point $B(1, 2, 1)$ infiniment voisin de $B(1, 2)$.

Si nous posons $\eta = 5\zeta + t$ $(t < 5)$, on voit que les courbes $C_0^{(\eta)}$ passent en outre cinq fois par $\zeta - 2$ points $B(1, 2, 1)$, $B(1, 2, 2), \ldots, B(1, 2, \zeta - 2)$ infiniment voisins successifs de $B(1, 2)$. Elles ont ensuite le comportement suivant.

Si $t = 0$,

$$B^5(1,\ 1,\ \zeta - 2), \qquad B^4(1,\ 2,\ \zeta - 1), \qquad B^4(1,\ 2,\ \zeta - 1,\ 1), \ldots, B^4(1,\ 2,\ \zeta - 1,\ 4).$$

Si $t = 1$,

$$B^5(1,\ 2,\ \zeta - 2), \qquad B^2(1,\ 2,\ \zeta - 1), \qquad B^2(1,\ 2,\ \zeta - 1,\ 1), \qquad B^1(1,\ 2,\ \zeta - 1,\ 2),$$
$$B^1(1,\ 2,\ \zeta - 1,\ 2,\ 1).$$

Si $t = 2$,

$$B^5(1,\ 2,\ \zeta - 2), \qquad B^3(1,\ 2,\ \zeta - 1), \qquad B^2(1,\ 2,\ \zeta - 1,\ 1), \qquad B^1(1,\ 2,\ \zeta - 1,\ 1,\ 1),$$
$$B^1(1,\ 2,\ \zeta - 1,\ 1,\ 1,\ 1).$$

Si $t = 3$,

$$B^5(1,\ 2,\ \zeta - 2), \qquad B^4(1,\ 2,\ \zeta - 1), \qquad B^1(1,\ 2,\ \zeta - 1,\ 1), \qquad B^1(1,\ 2,\ \zeta - 1,\ 1,\ 1),$$
$$B^1(1,\ 2,\ \zeta - 1,\ 1,\ 2), \qquad B^1(1,\ 2,\ \zeta - 1,\ 1,\ 3).$$

Si $t = 4$, p n'est pas premier.

Dans tous les cas, le système $|\,\Gamma_0^{(\eta)}\,|$ a le degré $n - (2\eta + 1)$ et le genre $\pi - (\eta + 1)$. On en conclut que sur la surface Φ_1, les courbes $\Gamma_0^{(\eta)}$ sont découpées par les hyperplans ayant un contact d'ordre $\eta - 2$ avec la courbe $\alpha_{\eta-1}$ en A'.

11. Les courbes $C_0^{(\eta+1)}$ ont en A la multiplicité $4\eta + 1$. 4η tangentes étant confondues avec a_1 et une avec $a_{\xi+2}$. Il en résulte tout d'abord qu'elles passent une fois par les points $B_1, B_2, \ldots, B_{2\eta}$.

Si l'on envisage les intersections absorbées en A des courbes $C_0^{(\nu-1)}$ et $C_0^{(\eta+1)}$, ont voit que ces dernières passent nécessairement 2η fois par chacun des points A_1, $A(1,\ 1)$.

Sur la surface Φ_1, les courbes $\Gamma_0^{(\eta+1)}$ sont des courbes $\Gamma_0^{(\eta)}$ particulières. Ces dernières ne rencontrent pas la courbe $\alpha_{\eta-1}$ et les premières rencontrent cette courbe, donc elles sont découpées sur la surface par les hyperplans contenant la courbe $\alpha_{\eta-1}$. On en conclut que la courbe $\alpha_{\eta-1}$ est une courbe rationnelle normale.

Observons que les courbes $C_0^{(\eta+1)}$ ne passent pas par $A_{3\eta+1}$, donc les courbes $\Gamma_0^{(\eta+1)}$ ne rencontrent plus la droite α_1 et celle-ci s'appuie donc en un point sur la courbe $\alpha_{\eta-1}$.

Le système $|\,\Gamma_0^{(\eta+1)}\,|$ a le degré $n - (4\eta + 1)$ et le genre $\pi - 3\eta$.

Observons que les courbes $\Gamma_0^{(\nu-1)}$ ou $\Gamma_0^{(3\eta)}$ ont également le genre $\pi - 3\eta$, donc on obtiendra les courbes $\Gamma_0^{(\eta+2)}$, $\Gamma_0^{(\eta+3)}, \ldots$ en considérant les sections de Φ_1 par les hyperplans contenant la courbe $\alpha_{\eta-1}$ et ayant en A', avec cette courbe, des contacts d'ordre $0,\ 1, \ldots$. Observons en particulier que les courbes en question ne rencontrent plus la conique β_2. Ces remarques ne sont d'ailleurs pas nécassaires pour notre objet.

12. D'après ce qui précède, la singularité de la surface Φ su point A est équivalente à un ensemble de trois courbes rationnelles: une droite α_1, une courbe $\alpha_{\eta-1}$ d'ordre $\eta-1$ et une conique β_2. La droite α_1 et la conique β_2 s'appuient sur $\alpha_{\eta-1}$ chacune en un point, mais ne se rencontrent pas. On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \alpha_1 + \alpha_{\eta-1} + \beta_2 .$$

Il en résulte que les courbes α_1, $\alpha_{\eta-1}$, β_2 ont respectivement les degrés virtuels -2, $-(\eta+1)$, -3.

Les courbes $\Gamma_0^{(\eta+1)}$ sont données par

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(\eta+1)} + \alpha_1 + 2\alpha_{\eta-1} + \beta_2 .$$

On vérifie aisément, sur cette égalité fonctionnelle, les résultats obtenus plus haut.

A une courbe C arbitraire de F correspond sur Φ une courbe Γ et inversement, à cette courbe correspond sur F l'ensemble formé par la courbe C et par les $p-1$ courbes C que $H, H^2, \ldots,$ lui font correspondre. En d'autres termes, il correspond à Γ une courbe du système linéaire $|pC|$, décomposée en p courbes C. Il en résulte que la courbe Γ appartient au système linéaire $|p\Gamma_0|$.

Faisons varier la courbe C d'une manière continue dans $|C|$ de telle sorte qu'elle tende vers une courbe C_1. La courbe Γ tend vers une courbe Γ_1 comptée p fois, augmentée des composantes des points de diramation. Nous pouvons donc écrire

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 + \rho_1\alpha_1 + \rho_2\alpha_{\eta-1} + \rho_3\beta_2 + \Delta,$$

Δ étant une combinaison des courbes équivalentes aux points de diramation de Φ autres que A.

En exprimant que les courbes Γ_1 rencontrent β_2 en un point, mais ne rencontrent pas α_1, $\alpha_{\eta-1}$, en obtient les relations

$$-2\rho_1 + \rho_2 = 0, \qquad \rho_1 - (\eta+1)\rho_2 + \rho_3 = 0, \qquad p + \rho_2 - 3\rho_3 = 0,$$

d'où $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$, $\rho_3 = 3\eta + 1$. On a donc

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 + \alpha_1 + 2\alpha_{\eta-1} + (2\eta+1)\beta_2 + \Delta,$$

On trouve de même

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_{\xi+2} + (3\eta+2)\alpha_1 + 3\alpha_{\eta-1} + \beta_2 + \Delta_1,$$

Δ_1 provenant des autres points de diramation.

13. Nous allons maintenant construire une surface F contenant une involution dont tous les points unis sont du type envisagé ci-dessus.

Posons $\rho = 3\eta + 2$ et considérons un espace $S_{\rho+2}$ à $\rho+2$ dimensions dont nous désignerons les coordonnées ponctuelles par $x_0, x_1, \ldots, x_\rho, y, z$.

Désignons par S_ρ^2 l'espace d'équations $y = z = 0$, par Y le point $(0, \ldots, 0, 1, 0)$ et par Z le point $(0, \ldots, 0, 0, 1)$.

Indiquons par φ_i une forme algébrique de degré i en $x_0, x_1, \ldots, x_\rho$ et par ψ_p une forme algébrique de degré p par rapport aux mêmes variables. Nous supposons ces formes indépendantes.

Cela posé. considérons la surface F représentée par les équations

$$\begin{aligned} y^{2+3i}z^{2\eta-2i-1} &= \varphi_{2\eta+i+1}, && (i = 0, 1, \ldots, \eta - 1), \\ y^{1+3i}z^{4\eta-2i} &= \varphi_{4\eta+i+1}, && (i = 0, 1, \ldots, 2\eta), \\ z^{6\eta+1} &= \psi_p. \end{aligned}$$

L' ordre de cette surface est multiple d' ordre p^2; nous le représenterons par pN.

La surface F est transformée en soi par l'homographie H_0 de période $p = 6\eta + 1$, d'équations

$$x_0' : x_1' : \ldots : x'_\rho : y' : z' = x_0 : \ldots : x_\rho : \varepsilon y : \varepsilon^{3\eta+2} z,$$

où ε est une racine primitive d' ordre p de l' unité.

L'homographie H_0 engendre sur F une involution I_p d'ordre $p = 6\eta + 1$. Elle a pour axes ponctuels l'espace S_ρ et les points Y, Z. L'espace S_ρ coupe F en pN points qui sont les points unis de l'involution. La surface F ne passe par les points Y, Z.

Pour obtenir les équations d'une surface Φ, image de l'involution I_p, il suffit de projeter F de la droite YZ soi l'espace S_ρ, ce qui revient à éliminer y, z entre les equations de F. On obtient ainsi les équations

$$\varphi_{2\eta+i+1}\varphi_{2\eta+j+1} = \varphi_{2\eta+i+j+2}, \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, \eta - 1), \tag{1}$$

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_{2\eta+2} \cdots \varphi_{3\eta} & \varphi_{4\eta+2} \cdots \varphi_p & \varphi_{2\eta+1}\varphi_{4\eta+1} \\ \varphi_{2\eta+1} \cdots \varphi_{3\eta-1} & \varphi_{4\eta+1} \cdots \varphi_{6\eta} & \psi_p \end{matrix} \right\| = 0, \tag{2}$$

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_{2\eta+1} & \varphi_{2\eta+2} \cdots \varphi_{3\eta} & \varphi_{4\eta+1} \\ \varphi_{4\eta+1} & \varphi_{4\eta+2} \cdots \varphi_{5\eta} & \psi_p \end{matrix} \right\| = 0. \tag{3}$$

La surface Φ est évidemment d' ordre N.

14. En un point uni A de l'involution, le plan tangent à F est le plan AYZ. Pour étudier ce point, nous supposerons qu'il coïncide avec le point $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, Le plan tangent à F en A a alors peur équations

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_\rho = 0;$$

dans le faisceau des tangentes à F en A, H_0 détermine l'homographie

$$y' : z' = y : \varepsilon^{3\eta+1} z.$$

Le point A est donc bien du type qui vient d'être étudié. Il est évident que les pN point unis de l'involution sont tous de même espèce

Nous déterminerons les équations du cône tangent à la surface Φ au point de diramation A.

Dans les formes φ_i, ψ_p le terme en x_0^i ou x_0^p manque. Nous désignerons par φ_i' la forme linéaire en $x_1, x_2, \dots, x_\rho$ coefficient de x_0^{i-1} dans φ_i et par ψ'_p la forme linéaire coefficient de x_0^{p-1} dans ψ_p.

L'hyperplan tangent en A à l'hypersurface (1) a pous équation $\varphi'_{4\eta+i+j+2}=0$, donc le cône tangent cherchè appartient à l'espace à $\eta+3$ dimensions d'équations

$$\varphi'_{4\eta+m+2}\equiv 0, \qquad (m=0,\ 1, \dots,\ 2\eta-2).$$

Dans cet espace, le plan α_1 a pour équations

$$\varphi'_{2\eta+i+1}=0, \quad (i=0,\ 1, \dots, \eta-2), \quad \varphi'_{4\eta+1}=0, \quad \psi'_p=0;$$

le cône $\alpha_{\eta-1}$ a pour équations

$$\left\| \begin{matrix} \varphi'_{2\eta+1} \dots \varphi'_{3\eta-1} \\ \varphi'_{2\eta+2} \dots \varphi'_{3\eta} \end{matrix} \right\| = 0, \quad \varphi'_{4\eta+1}=0, \quad \psi_p'=0$$

et le cône β_2,

$$\varphi'_{2\eta+i+1}=0, \quad (i=1,\ 2, \dots \eta-1), \quad \varphi'_p=0,$$

$$\begin{vmatrix} \varphi'_{2\eta+1} & \varphi'_{4\eta+1} \\ \varphi'_{4\eta+1} & \varphi_p' \end{vmatrix} = 0.$$

II. **Etude du cas** $p=6\eta+5$.

15. Lorsque $p=6\eta+5$, le système $|C_0'|$ est donné par $\lambda=1$ et $\mu=2\eta+1$. Ces courbes ont donc la multiplicité $2\eta+2$ en A, $2\eta+1$ tangentes étant confondues avec a_1 et une avec $a_{\xi+2}$. Il en résulte que ces courbes passent simplement par $4\eta+3$ points $B_1, B_2, \dots, B_{4\eta+3}$ infiniment voisins successifs de A, le dernier de ces points étant uni parfait pour l'involution et les autres unis non parfaits.

En considérant les intersections d'une courbe C_0' et d'une courbe $C_0^{(\nu-1)}$ absorbées en A, on voit que les courbes C_0' passent $\eta+1$ fois par A_1, η fois par $A(1, 1)$, qui est uni parfait pour l'involution, et une fois par $3\eta+2$ points $A_2, A_3, \dots, A_{3\eta+3}$, points infiniment voisin successifs de A_1.

Considérons la surface Φ_1, projection de Φ à partir de A sur un hyperplan, surface dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ_0'. Aux domaines des points $A_{3\eta+3}$, $A(1, 1)$, $B_{4\eta+3}$, correspondent respectivement sur Φ_1 une droite α_1, une courbe rationnelle α_η d'ordre η et une droite β_1. Le point A est donc multiple d'ordre $\eta+2$ pour la surface Φ, le cône tangent se composant de deux plans et d'un cône d'ordre η.

Le système $|\Gamma_0'|$ a le degré $n-(\eta+2)$ et le genre $\pi-(\eta+1)$.

16. Les courbes C_0'' ont la multiplicité $2\eta + 3$ en A, $2\eta - 1$ tangentes sur ce point étant confundues avec a_1 et 4 avec $a_{\xi+2}$. Il leur correspond sur Φ_1 des courbes Γ_0'' découpées sur cette surface par les hyperplans passant par un point A'.

Les courbes C_1 rencontrant les courbes C_0'' en p points confondus en A, ces dernières courbes ne peuvent plus passer par le point $B_{4\eta+3}$ et le point A' appartient donc à la droite β_1. Si le point A' n'appartenait pas à la courbe α_η, les courbes C_0'' passeraient η fois par $A(1, 1)$ et au moins η fois par le point A_1, ce qui est impossible, les tangentes aux courbes C_0'' confondues avec a_1 étant an nombre de $2\eta - 1 < 2\eta$. Il en résulte que les courbes C_0'' passent η fois par A_1, $\eta - 1$ fois par $A(1, 1)$ et une fois par les points A_2, $A_3, \dots, A_{3\eta+3}$.

Supposons que les courbes C_0'' passent 4 fois par les points $B_1, B_2, \dots, B_x$ et k fois par B_{x+1}. Nous aurons

$$4x + k = 4\eta + 2,$$

d'où $k = 2$ et $x = \eta$. Les courbes C_0'' passent donc 4 fois par les points $B_1, B_2, \dots, B_\eta$, 2 fois par $B_{\eta+1}$ e par un point $B(\eta + 1, 1)$, uni parfait pour l'involution, infiniment voisin de $B_{\eta+1}$.

Le degré et le genre du système $|\Gamma_0''|$ sont respectivement égaux à $n - (\eta + 4)$ et à $\pi - (\eta + 2)$. Le point A' est donc double pour la surface Φ_1; il est équivalent à une conique que nous désignerons par β_2 et qui repprésente le domaine du point $B(\eta + 1, 1)$. La courbe β_2 rencontre la courbe α_η et la droite β_1 chacune en un point, mais les courbes α_η, β_1 n'ont aucun point commun au sens de la géométrie des transformations birationelles.

17 Les courbes C_0''' ont en A la multiplicité $2\eta + 4$, avec $2\eta - 3$ tangentes confondues avec a_1 et 7 avec $a_{\xi+2}$.

En raisonnant comme pour les courbes C_0'', on voit que les courbes C_0''' passent $\eta - 1$ fois par A_1, $\eta - 2$ fois par $A(1, 1)$ et une fois par les points $A_2, A_3, \dots, A_{3\eta+3}$. Les courbes Γ_0''' sont donc découpées sur Φ_1 par les hyperplans passant par A' et par un second point de la courbe α_η.

Projetons la surface Φ_1 de A' sur un hyperplan de l'espace ambiant; nous obtenons une surface Φ_2 sur laquelle au point A' correspond la conique β_2. A la courbe α_η correspond une courbe d'ordre $\eta - 1$ que nous désignerons toujours par le même symbole et à la droite β_1 correspond un point de la conique β_2 (multiple pour la surface). Les courbes Γ_0''' sont découpées sur Φ_2 par les hyperplans passant par un poin A'' de α_η.

Supposons que A'' n'appartienne pas à la conique β_2. Les courbes C_0''' passent 2 fois par $B(\eta + 1, 1)$, 2 fois au moins par $B_{\eta+1}$, 4 fois au moins par $B_\eta, B_{\eta-1}, \dots, B_1$. Mais cela est impossible, car alors les courbes C_1 rencontreraient les courbes C_0''' en $p + 1$ points au moins confondus en A. Il en résulte que le point A'' appartient à la conique β_2 et que les courbes C_0''' passent une fois par $B(\eta+1,\ 1)$. Comme les courbes C_0''' sont des courbes C_0'' particulières, elles passent une fois par $B_{\eta+1}$ et par suite 2 fois par B_η.

Supposons que les courbes C_0'' passent 7 fois par $B_1, B_2, \dots, B_x (x < \eta)$, k fois par B_{x+1} et 2 fois par $B_{x+2}, \dots, B_\eta$. On a, en exprimant que les courbes C_1 rencontrent les courbes C_0''' en p points confondus en A,

$$5x + k = 2\eta + 2.$$

On ne peut avoir $\eta = 5\zeta$, car p ne serait pas premier.

Si $\eta = 5\zeta + 1$, on a $x = 2\zeta$, $k = 4$ et les points suivants:

$$B^4_{2\zeta+1}, \qquad B^2(2\zeta+1,\ 1), \qquad B^1(2\zeta+1,\ 2), \qquad B^1(2\zeta+1,\ 2,\ 1).$$

Si $\eta = 5\zeta + 2$, on a $x = 2\zeta$, $k = 6$ et les points

$$B^6_{2\zeta+1}, \quad B^1(2\zeta+1,\ 1), \quad B^1(2\zeta+1,\ 1,\ 1), \quad B^1(2\zeta+1,\ 1,\ 2), \quad B^1(2\zeta+1,\ 1,\ 3).$$

Si $\eta = 5\zeta + 3$, on a $x = 2\zeta + 1$, $k = 3$ et les points

$$B^3_{2\zeta+2}, \qquad B^1(2\zeta+2,\ 1), \dots, \qquad B^1(2\zeta+2,\ 4).$$

Si enfin $\eta = 5\zeta + 4$, on a $x = 2\zeta + 1$, $k = 5$ et

$$B^5_{2\zeta+2}, \qquad B^2(2\zeta+2,\ 1), \qquad B^1(2\zeta+2,\ 1,\ 1), \qquad B^1(2\zeta+2,\ 1,\ 1,\ 1).$$

Dans tous les cas, le système $|\Gamma_0''|$ a le degré $n - (\eta + 5)$ et le genre $\pi - (\eta + 2)$. Le point A'' est donc simple pour la surface Φ_2. On en conclut que les courbes Γ_0''' sont découpées sur la surface Φ_1 par les hyperplans touchant la courbe $\alpha_{2\eta}$ au point A'.

On prouverait de même que les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans osculant $\alpha_{2\eta}$ au point A'. Et ainsi de suite.

18. Les courbes $C_0^{(\eta+1)}$ ont en A la multiplicité $3\eta + 2$, une tangente confondue avec a_1 et $3\eta + 1$ avec $a_{\xi+2}$. Elles passent simplement par les points $A_1, A_2, \dots, A_{3\eta+3}$. Les courbes $\Gamma_0^{(\eta+1)}$ sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans ayant un contact d'ordre $\eta + 1$ avec α_η au point A'. Ces courbes rencontrent encore β_2 en un point et par conséquent les courbes $C_0^{(\eta+1)}$ passent une fois per $B(\eta+1,\ 1)$, une fois par $B_{\eta+1}$, 2 fois par $B_\eta, B_{\eta-1} \dots$.

En tenant compte du fait que les courbes C_1 rencontrent les courbes $C_0^{(\eta+1)}$ en p points confondus en A, on voit que ces dernières courbes passent $\eta + 4$ fois par B_1, 2 fo s par $B_2, B_3, \dots, B_\eta$, $\eta + 2$ fois par $B(1,\ 1)$, $\eta - 5$ fois par $B(1,\ 2)$, 7 fois par un point $B(1,\ 2,\ 1)$, 7 fois par une suite de points $B(1,\ 2,\ 1,\ 1)$, $B(1,\ 2,\ 1,\ 2) \dots$. Pour achever la détermination des points appartenant aux courbes envisagées, il faudra supposer $\eta = 7\zeta$, $\eta = 7\zeta + 2, \dots$.

Nous nous bornerons au premier cas. On a alors $\zeta - 2$ points multiples d'ordre 7.

$$B(1, 2, 1, 1), \quad B(1, 2, 1, 2), \ldots, \quad B(1, 2, 1, \zeta - 1)$$

suivi de trois points doubles

$$B(1, 2, 1, \zeta), \quad B(1, 2, 1, \zeta, 1), \quad B(1, 2, 1, \zeta, 2),$$

suivis eux-mêmes le deux point simples

$$B(1, 2, 1, \zeta, 3), \quad B(1, 2, 1, \zeta, 3, 1).$$

Dans tous le cas, on trouve que le système $|\Gamma_0^{(\eta+1}|$ a le degré $n - (2\eta + 3)$ et le genre $\pi - (\eta + 2)$.

19. Il nous restera, pour achever la détermination de la structure du point de diramation A de la surface Φ, à étudier le système $|C_0^{(\eta+2)}|$.

Les courbes $C_0^{(\eta+2)}$ ont la multiplicité $4\eta + 4$ en A, $4\eta + 2$ tangentes étant confondues avec a_1 et 2 avec $a_{\xi+2}$. Ces courbes ne peuvent plus passer par $A_{3\eta+3}$, car autrement, elles rencontreraient les courbes $C_{\xi+2}$ en plus le p points confondus en A. La somme des multiplicités de A_1, $A(1, 1)$ pour ces courbes devant être égale à $4\eta + 2$, elles passent $2\eta + 1$ fois par chacun de ces points. Il en résulte que les courbes $\Gamma_0^{(\eta+2)}$ sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans contenant la courbe α_η, qui est par suite normale. On en conclut que les courbes $\Gamma_0^{(\eta+2)}$ coupent β_2 en un point variable et que par suite les courbes $C_0^{(\eta+2)}$ passent une fois par $B(\eta + 1, 1)$, donc une fois par $B_{\eta+1}$, 2 fois par $B_\eta, \ldots,$ 2 fois au moins par B_1.

En considérant le nombre des intersections des courbes $C_0^{(\eta+2)}$ et $C_0^{(\nu-1)}$ confondues en A, on voit que les premières passent exactement 2 fois par B_1 et par suite 2 fois par $B_2, B_3, \ldots B_\eta$.

Les courbes $\Gamma_0^{(\eta+2)}$ ont le degré $n - 4(\eta + 1)$ et le genre $\pi - (3\eta + 2)$, c'est-à-dire le même genre que les courbes $\Gamma_0^{(\nu-1)}$.

Par conséquent, on obtiendra les systèmes $|\Gamma_0^{(\eta+3)}|, \ldots$ en imposant des point-base simples aux courbes $\Gamma_0^{(\eta+2)}$.

On voit également que la droite α_1 s'appuie en un point sur la courbe α_η.

20. Ce qui précède montre que le point singulier A de la surface Φ est équivalent à l'ensemble de quatre courbes rationnelles: une droite α_1, une courbe α_η d'ordre η recontrant α_1 en un point, une conique β_2 rencontrant α_η en un point, une droite β_1 rencontrant β_2 en un point.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \alpha_1 + \alpha_\eta + \beta_2 + \beta_1.$$

On en déduit que les courbes $\alpha_1, \alpha_\eta, \beta_2, \beta_1$ ont respectivement les degrés virtuels -2, $-(\eta + 2)$, -2, -2.

On a ensuite

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'' + \alpha_1 + \alpha_\eta + 2\beta_2 + \beta_1$$

et

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(\eta+2)} + \alpha_1 + 2\alpha_\eta + 2\beta_2 + \beta_1 .$$

Comme dans le premier cas, on établit sans difficulté les relations fonctionnelles

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 + \alpha_1 + 2\alpha_\eta + (2\eta + 3)\beta_2 + 4(\eta + 1)\beta_1 + \Delta,$$
$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_{\xi+2} + (3\eta + 4)\alpha_1 + 3\alpha_\eta + 2\beta_2 + \beta_1 + \Delta_1 .$$

21. Nous allons maintenant construire une surface F contenant une involution n'ayant qu'un nombre fini de points unis, tous de même espéce que le point uni que nous venons d'étudier.

Posons $\rho = 3\eta + 4$ et désignons encore par φ_i, ψ_p des formes algébriques en $x_0, x_1, \ldots, x_\rho$ dont le degré est indiqué par l'indice. En conservant les mêmes notations que plus haut (n° 13), considérons la surface F d'équations

$$y^{1+3i}z^{2\eta-2i+1} = \varphi_{2\eta+i+2}, \qquad (i = 0, 1, \ldots, \eta),$$
$$y^{2+3i}z^{4\eta-2i+1} = \varphi_{4\eta+i+4}, \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2\eta + 1),$$
$$z^p = \psi_p$$

Nous désignerons par pN l'ordre de cette surface. Elle est transformée en elle-même par l'homographie H_0 et celle-ci engendre, sur la surface, une involution I_p d'ordre p, ayant pN points unis, intersection de la surface avec l'espace S_ρ.

Pour avoir les équations d'une surface Φ, image de l'involution, projetons F de la droite YZ sur l'espace S_ρ, c'est-à-dire éliminons y, z entre les équations précédentes. On obtient ainsi la surface

$$\varphi_{2\eta+i+2}\varphi_{2\eta+j+2} = \varphi_{4\eta+i+j+4}, \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, \eta) \tag{1}$$

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_{2\eta+2} \cdots \varphi_{3\eta+1} & \varphi_{4\eta+4} & \psi_p \\ \varphi_{2\eta+3} \cdots \varphi_{3\eta+2} & \varphi_{4\eta+5} & \varphi_{2\eta+2}\varphi_{4\eta+4} \end{matrix} \right\| = 0, \tag{2}$$

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_{2\eta+2} & \varphi_{2\eta+3} \cdots \varphi_{3\eta+2} \\ \varphi_{4\eta+4} & \varphi_{4\eta+5} \cdots \varphi_{5\eta+4} \end{matrix} \right\| = 0. \tag{3}$$

La surface Φ est d'ordre N.

22. Pour étudier un point uni A de l'involution, supposon qu'il coïncide avec le point $(1, 0, 0, \ldots, 0)$. Le plan tangent en ce point à la surface F est le plan AYZ et dans le faisceau des tangentes à F en A, H_0 détermine l'homographie

$$y' : z' = y : \varepsilon^{3\eta+4}z,$$

de période $p = 6\eta + 5$. Le point A est donc bien le point uni que nous venons d'étudier et tous les points unis de l'involution sur F sont évidemmant de même espèce.

Nous allons maintenant déterminer le cône tangent à la surface Φ au point A. Dans les formes φ_i, ψ_p, nous supposerons donc que les termes en $x_0{}^i$, $x_0{}^p$ manquent et nous désignerons par φ_i', ψ_p' les coefficients (formes linéaires en $x_0, x_1, \ldots, x_\rho$) des termes en $x_0{}^{i-1}$, $x_0{}^{p-1}$ respectivement.

Les hyperplans tangents aux hypersurfaces (1) sont donnés par

$$\varphi'_{4\eta+m+1} = 0, \qquad (m = 0, 1, \ldots, 2\eta)$$

Ils déterminent un espace à $\eta + 3$ dimensions qui contient le cône tangent à la surface Φ en A. Ce cône se scinde en trois parties :

1°) Le plan α_1, d'équations

$$\varphi'_{2\eta+2} = 0, \qquad \varphi'_{2\eta+3} = 0, \ldots, \varphi'_{3\eta+1} = 0, \qquad \psi_p' = 0;$$

2°) le cône α_η, d'équations

$$\left\| \begin{matrix} \varphi'_{2\eta+2} & \varphi'_{2\eta+3} \cdots \varphi'_{3\eta+1} \\ \varphi'_{2\eta+3} & \varphi'_{2\eta+4} \cdots \varphi'_{3\eta+2} \end{matrix} \right\| = 0, \qquad \varphi_p' = 0, \qquad \psi_p' = 0;$$

3°) le plan β_1, d'équations

$$\varphi'_{2\eta+3} = 0, \qquad \varphi'_{2\eta+4} = 0, \ldots, \varphi'_{3\eta+2} = 0, \qquad \varphi'_p = 0.$$

On vérifie sans peine que α_1 et β_1 rencontrent chacun le cône α_η suivant une droite.