La Mathématique

Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie royale de Belgique
Professeur émérite à l'Université de Liége
Président du Centre Belge de Recherches Mathématiques

Ecrire une notice sur la Mathématique est une entreprise périlleuse dès qu'elle s'adresse aux personnes cultivées. Car, si l'on excepte les mathématiciens, les physiciens et les ingénieurs, les personnes cultivées ont en général un bagage mathématique fort léger : la géométrie élémentaire et la résolution des équations du second degré. Il fallait écrire pour ces personnes sans utiliser le symbolisme mathématique, ce qui nous paraissait une difficulté insurmontable. En Mathématiques, il n'y a pas de route royale. Nous avons néanmoins essayé de faire comprendre quelles étaient les idées fondamentales utilisées par les mathématiciens. Nous dirons tout de suite qu'il y a des lacunes dans notre exposé, mais cela tient au fait que nous avons voulu rester accessible aux personnes dont il est question plus haut. Il est bon d'ajouter que beaucoup de celles-ci se font une fausse idée des Mathématiques. Un Officier supérieur, qui avait d'ailleurs montré sa valeur dans la conduite de la guerre, nous disait un jour: « Pour moi, les géométries à n dimensions, c'est du roman ». Nous ne savons si nous avons réussi à lui faire comprendre que pour les mathématiciens, c'était une notation commode.

Nous imaginons qu'une personne cultivée qui aura eu la patience de nous lire jusqu'au bout, dira : A quoi tout cela peut-il bien servir ? Il nous souvient que participant un jour à un Colloque de Géométrie algébrique à Taormina, un journaliste me demanda : A quoi sert la Géométrie algébrique ? Et nous lui répondîmes en badinant : A me divertir. Il est de fait que la Mathématique est un art et que celui qui s'adonne à la recherche mathématique y est poussé par une force invincible, sans doute analogue à celle que ressent le poète ou le peintre. Il ne faudrait pas croire cependant que les recherches des mathématiciens sont inutiles au point de vue pratique. A la fin du siècle dernier, un mathématicien italien, Ricci-Curbastro, qui fut professeur à l'Université de Padoue, avait imaginé une méthode de géométrie différentielle, basée sur une sorte de calcul. On reconnut alors l'élégance de cette méthode, mais sans lui donner une grande importance. Plus tard, lorsque Einstein créa la relativité générale, il fut tout heureux de trouver le calcul de Ricci pour développer sa théorie. Cet exemple montre qu'il ne faut pas être sceptique au sujet de l'utilité des Mathématiques.

La Mathématique n'a peut-être pas toujours eu en Belgique la place qui lui revenait. Si l'on dressait la liste des mathématiciens belges qui ont eu quelque valeur, en indiquant pour chacun la date de naissance, on serait étonné qu'il y a parfois des trous de quinze ans et plus. Il faut dire à la louange du Fonds National de la Recherche scientifique que les choses ont changé depuis la création de cet organisme, mais il arrive malheureusement que de jeunes mathématiciens écoutent la voix de l'étranger et quittent notre pays.

Dans un pays comme le nôtre, qui n'a pas dix millions d'habitants, il serait sans doute vain d'espérer que toutes les branches des Mathématiques soient représentées par des chercheurs de valeur. Pour pallier cet inconvénient et profitant d'une initiative de M. C. Huysmans, alors Ministre de l'Instruction publique, nous avons créé, en 1948, un Centre Belge de Recherches Mathématiques, qui groupait les professeurs de Mathématiques de l'Enseignement supérieur. Nous organisions des Colloques de la manière suivante : Chaque Colloque était consacré à une théorie déterminée et nous demandions aux mathématiciens étrangers que nous invitions non pas de nous apporter des résultats inédits, mais de nous exposer ce qu'ils avaient fait, les résultats qu'ils avaient obtenus, les méthodes qu'ils avaient utilisées et pourquoi, enfin ce qui restait à faire. Ces Colloques — il y en eut une vingtaine — connurent un incontestable succès ; nous fûmes du reste imités à l'étranger. Leur but : Mettre nos jeunes chercheurs en contact avec des savants qui pouvaient les guider. Mais voici deux ans, le Conseil supérieur de la Recherche scientifique a supprimé tous les centres de recherches. Nous n'avons pas encore compris pourquoi. Nous estimons d'ailleurs que les Académies eussent dû être consultées, un de leurs rôles étant d'ailleurs d'éclairer le Gouvernement sur les questions scientifiques. Mais il est plus difficile d'entrer dans une Académie que dans le Conseil dont il vient d'être question.

Il est vraisemblable que les premières spéculations des hommes portèrent sur le calcul et la mesure de l'étendue. Les premières recherches mathématiques sont très anciennes. C'est ainsi que les Sumériens, qui vivaient vers l'an 2000 avant J.-C., avaient résolu des problèmes qui se ramènent à des équations du second degré. D'autre part, les inondations du Nil avaient obligé les Égyptiens à s'occuper d'arpentage. On attribue à Thalès l'introduction en Grèce des connaissances géométriques des Égyptiens. Alors opéra le miracle grec. D'expérimentale qu'elle était, la Géométrie allait devenir une science déductive. Une première élaboration de la Géométrie est due à l'École de Pythagore, mais dans cette géométrie, le point était une sorte de grain de sable, la monade, et les Grecs s'aperçurent bientôt que cette conception excluait les nombres irrationnels. Une longue élaboration, à travers la critique des Eléates, conduisit aux « Éléments d'Euclide » (IIIe siècle avant J.-C.). Construction logique, suffisamment approchée de la géométrie physique pour satisfaire aux exigences de la pratique.

Si l'on veut fixer en gros l'apport grec aux Mathématiques, il convient de citer le traité des sections coniques d'Apollonius et les travaux d'Archimède, qui fut au fond le précurseur du calcul infinitésimal. On aura une idée plus précise de cet apport en recourant aux traductions des œuvres des mathématiciens grecs dues à un ingénieur belge, Paul Ver Ercke, traductions précédées de notices érudites sur le mouvement scientifique de l'époque.

Les Mathématiques grecques furent très lentes à pénétrer dans nos régions; elles y furent introduites en partie par l'Italie, en partie par les Arabes d'Espagne. Ce n'est guère qu'aux XIe ou au XIIe siècle que cette pénétration eut lieu.

Le Grecs faisaient de l'algèbre, mais en quelque sorte de l'algèbre géométrique. Les relations algébriques étaient pour eux des relations entre des segments de droites. On attribue aux Arabes les premières recherches d'algèbre, mais c'est à François Viète (1540-1603) qu'est due la notation algébrique où les quantités connues ou inconnues sont représentées par des lettres. Dans la résolution des équations algébriques, Viète rejetait les solutions négatives ou imaginaires. Les travaux des géomètres italiens : Bombelli, Tartaglia, Cardan (XVIe siècle) sur la résolution des équations du troisième degré devaient modifier ce point de vue.

Le XVIIe siècle allait voir des progrès essentiels en géométrie. Dès le XIVe siècle, Nicole Oresme avait introduit la notion de coordonnées, qu'il appelait longitude et latitude, pour étudier le mouvement d'un point. Mais la notation algébrique manquait pour développer à cette époque une géométrie analytique. Il n'en fut plus de même trois siècles plus tard et Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1663) érigèrent, chacun de son côté, la géométrie analytique en corps de doctrine. D'un autre côté, l'étude des méthodes de perspectives utilisées par les peintres conduit Desargues (1593-1662) à introduire une notion nouvelle, celle des points à l'infini et à jeter ainsi les bases de la géométrie projective. Les premiers développements de celle-ci sont dus à Desargues et à Pascal (1623-1662).

Parmi les problèmes qui préoccupaient les géomètres, se trouvait celui de la construction des tangentes à une courbe et celui de la mesure des aires et des volumes. Il y eut une longue suite de précurseurs du calcul infinitésimal, parmi lesquels nous pouvons citer deux compatriotes : Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) et René de Sluse (1622-1685). Toutes ces recherches allaient aboutir à la création du Calcul infinitésimal, par des voies différentes, par Leibnitz (1646-1716) et Newton (1643-1727).

A la fin du XVIIIe siècle, les mathématiciens avaient à leur disposition de puissants moyens d'investigation, mais il était nécessaire d'apporter des précisions sur les notions mathématiques utilisées. Ce fut en grande partie l'œuvre de Cauchy (1789-1857).

Le calcul infinitésimal introduit en Mathématiques une nouvelle opération : le passage à la limite. Considérons une variable x qui passe par une infinité de valeurs successives, de telle sorte qu'étant données deux de ces valeurs, on puisse dire que l'une précède l'autre et laquelle. Cela étant, on dit que la variable x a pour limite une quantité a lorsque la différence x-a, prise en valeur absolue, peut devenir et rester inférieure à un nombre positif donné, arbitrairement choisi, aussi petit qu'on le veut. Notons en passant que l'on fait ici intervenir le temps, qui semble être ainsi la seule variable indépendante; il résulte d'ailleurs de la définition que x varie avec le temps. En quoi consiste l'opération de passage à la limite? Imaginons qu'entre un certain nombre de variables x, y,..., z existe une relation R et que ces variables tendent simultanément vers des limites a, b, ..., c. Eh bien ces quantités a, b, ..., c sont également liées par la relation R.

Une fois précisée l'opération de passage à la limite, il importe de préciser également la notion de fonction. On dit qu'une expression f(x) est une fonction définie de x lorsque, à chaque valeur de x prise dans un certain intervalle correspond une et une seule valeur bien déterminée de f(x). Et cette définition s'étend sans peine aux fonctions de plusieurs variables. Ici se pose une question. Il est facile d'imaginer une expression f(x) telle qu'à une valeur de x correspondent plusieurs valeurs de f. Pour utiliser cette expression, on doit décomposer f(x) en autant de fonctions qu'il y a de valeurs de f correspondant à une valeur de x. Cette limitation dans la définition d'une fonction est nécessaire pour donner des définitions précises de la continuité et de la dérivation, comme on va le voir.

Considérons une fonction f(x) définie dans un intervalle. On dit que la fonction f(x) est continue en un point x lorsque f(x′) a pour limite f(x) quand x′ tend vers x. Si dans les mêmes conditions, la limite du rapport de f(x) − f(x′) sur x − x′ existe, cette limite est la dérivée de f(x) au point x. Pendant longtemps, on a cru que toute fonction continue avait une dérivée. Il n'en est rien et Weierstrass a construit en 1882 une fonction continue sans dérivée. Depuis, on en a construit de nombreux exemples. Une fonction qui admet une dérivée est continue et on dit qu'elle est différentiable. La définition de continuité s'étend facilement aux fonctions de plusieurs variables. Par contre, une fonction de plusieurs variables admet une dérivée par rapport à chacune des variables, ce sont les dérivées partielles de la fonction.

Ce qui précède concerne les fonctions réelles de variables réelles. On s'est cependant proposé d'étudier des fonctions $f(z)$ d'une variable complexe $z=x+iy$ (où $i^2=-1$) en exigeant qu'une telle fonction ait une dérivée $f'(z)$ se calculant comme si z était réelle. De telles fonctions existent et sont appelées fonctions analytiques.

Un des problèmes qui s'est posé aux géomètres est la recherche des primitives d'une fonction $f(x)$ donnée, c'est-à-dire une fonction dont $f(x)$ soit la dérivée. On s'est vite aperçu que les fonctions connues, c'est-à-dire en dehors des fonctions algébriques, les fonctions exponentielles, trigonométriques et logarithmiques, ne suffisaient pas pour résoudre ce problème. La primitive d'une fonction est en général une fonction transcendante nouvelle et ces fonctions ont donné lieu à de nombreuses recherches. La question peut se présenter d'une manière différente en utilisant les intégrales définies. Supposons que la fonction $f(x)$ soit donnée dans un segment S et partageons ce segment en un certain nombre de segments $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Multiplions la longueur du segment s_i par une valeur de $f(x)$ en un point de ce segment et faisons la somme de tous les produits ainsi obtenus. Si cette somme tend vers une limite I lorsque les longueurs de tous les segments s_i tendent vers zéro, I est l'intégrale définie de $f(x)$ dans le segment S. Si x_o et x sont les extrémités de S, on obtient la somme ou intégrale de $f(x)$ dans le segment (x_o, x).

Les recherches des physiciens les conduisent à des équations différentielles ou aux dérivées partielles, c'est-à-dire à des relations entre des variables indépendantes x, y, ..., z, des fonctions inconnues f, g, ..., h de ces variables et des dérivées de ces fonctions par rapport à ces variables. Le problème posé aux mathématiciens est de déterminer ces fonctions. Bornons-nous à la considération du cas le plus simple d'une équation $f(x, y, y')=o$ liant une variable indépendante x, une fonction y de x et sa dérivée y'. Supposons ces quantités réelles. La première question à résoudre est de déterminer les conditions auxquelles la fonction f doit satisfaire pour que la fonction $y(x)$ existe. Cette question a été résolue en partie par exemple par la méthode des approximations successives de Picard. On forme successivement des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ de x qui s'approchent de plus en plus de la fonction cherchée $y(x)$. Celle-ci est obtenue comme limite de y_n lorsque n tend vers l'infini et cette limite existe si la fonction $f(x, y, y')$ satisfait à une certaine condition appelée condition de Lipschitz. Il reste cependant à voir si cette condition ne peut pas être remplacée par une condition plus large. Comme dans le cas de la recherche des fonctions primitives, on obtient en général des transcendantes nouvelles dont il s'agit d'étudier les propriétés même si on ne peut, ce qui est le cas général, obtenir l'expression de $y(x)$.

Ceci montre le genre de problèmes que les équations différentielles et aux dérivées partielles posent aux mathématiciens; ils ont donné lieu à de nombreux travaux souvent remarquables et passionnants. Il en est de même des recherches sur les équations différentielles et aux dérivées partielles portant sur des variables complexes. Dans ces recherches, de nombreux mathématiciens se sont illustrés. C'est d'ailleurs toujours une question à l'ordre du jour.

La théorie des fonctions de variables réelles a fait vers 1900 de très grands progrès sous l'impulsion de Borel, Baire, Lebesgue et de La Vallée Poussin. Elle a débuté par l'introduction d'une notion de mesure d'un ensemble que l'on peut indiquer de la manière suivante : Considérons un segment de droite S de longueur s et dans ce segment un ensemble de points A, d'ailleurs quelconque. Considérons ensuite de petits segments appartenant au segment S, qui peuvent empiéter les uns sur les autres, formant une infinité numérable et qui contiennent tous les points de A. Formons la somme des longueurs de ces petits segments et recommençons cette opération de toutes les manières possibles. Soit μ la borne inférieure des nombres ainsi obtenus. Désignons maintenant par A' l'ensemble des points de S qui n'appartiennent pas à A et recommençons sur cet ensemble les mêmes opérations que sur A. Soit μ' le nombre obtenu. Si $\mu+\mu'=s$, on dit que l'ensemble A est mesurable et a pour mesure (de Lebesgue) μ.

Cela étant, nous pouvons définir l'intégrale de Lebesgue d'une manière analogue à celle de Riemann, qui a été définie plus haut. Supposons que la fonction $f(x)$ ait pour bornes inférieure et supérieure m et M. Soient l_1, l_2, l_i, l_{i+1} des nombres croissants compris entre m et M. Les points de S où la fonction $f(x)$ prend des valeurs comprises entre l_i et l_{i+1} forment un ensemble de mesure μ_i. Si les sommes $\Sigma l_i \mu_i$, $\Sigma l_{i+1} \mu_i$ ont même limite lorsque les intervalles $l_i \, l_{i+1}$ tendent tous vers zéro, cette limite est l'intégrale de Lebesgue de $f(x)$. Ces concepts, que nous venons d'esquisser, ont permis de profondes recherches sur la théorie des fonctions.

Un instrument qui fut particulièrement utile aux géomètres dans la théorie des fonctions est constitué par les séries. Une série est une somme algébrique d'une infinité de termes, mais pour que la considération d'une série suit utile, il faut qu'elle soit convergente c'est-à-dire que si S_n est la somme des n premiers termes, cette quantité ait une limite bien déterminée quand n tend vers l'infini. On conçoit que si les termes d'une série dépendent d'une ou plusieurs variables, il en est de même de la somme de cette série et on a ainsi un procédé de représentation des fonctions. Fourier, à propos de la théorie des cordes vibrantes, a introduit les séries trigonométriques, dont les termes sont des sinus et des cosinus de multiples entiers d'un arc. Elles ont été l'objet de nombreuses et profondes recherches et se présentent d'ailleurs chaque fois que l'on veut étudier un phénomène périodique.

Des travaux plus récents ont porté sur certaines séries divergentes, en introduisant une définition plus générale de la somme d'une série.

Il convient d'ajouter que les mathématiciens, dans leurs recherches sur la théorie des fonctions, ne se sont pas bornés à la considération de fonctions continues, mais ont aussi considéré les discontinuités des fonctions.

La recherche des maxima et minima ou comme on dit des extréma des fonctions se fait au moyen du calcul différentiel, en général en annulant les dérivées de ces fonctions. Par exemple, en un extremum d'une fonction différentiable f(x), la dérivée de cette fonction est nulle. Mais il existe d'autres problèmes d'extremum qui ressortissent au Calcul des variations, créé autrefois par Euler et Lagrange. Pour indiquer le genre de problèmes utilisant ce calcul, prenons un exemple trivial. Proposons-nous de rechercher le chemin le plus court allant d'un point A à un point B. Supposons que ce soit une courbe L. La longueur de celle-ci s'exprime par une intégrale définie entre les limites A et B, dont il faut chercher le minimum. Les méthodes du Calcul des variations ramènent le problème à l'intégration de deux équations différentielles et on trouve évidemment que L est le segment AB. On voit par cet exemple en quoi consiste le Calcul des variations. Il s'agit de déterminer une ou plusieurs fonctions de telle sorte qu'une intégrale portant sur ces fonctions soit extremum. Lorsqu'il s'agit d'intégrales simples portant sur des fonctions d'une variable, la question peut être considérée comme résolue, bien que la détermination du sens de l'extremum ne semble pas être élucidée. Dans les autres cas, il y a encore de nombreuses questions qui se posent.

Le Calcul des variations a donné naissance à un calcul plus général : le Calcul fonctionnel, où il s'agit de déterminer des fonctions jouissant de certaines propriétés, par exemple satisfaisant à certaines équations appelées équations intégrales où la fonction à déterminer figure dans une intégrale. Il semble difficile d'entrer dans plus de détails sans user du symbolisme mathématique.

On peut exprimer par radicaux les racines d'une équation du second degré; il en est de même des racines des équations du troisième et du quatrième degrés. Mais cela n'est plus possible pour les racines d'une équation de degré supérieur à quatre si l'équation n'est pas particulière, c'est-à-dire s'il n'existe pas certaines relations entre ses coefficients. La détermination des cas où la résolution par radicaux est possible est l'œuvre d'un géomètre de vingt ans : Évariste Galois (1811-1832). Et l'on peut dire que dans la méthode qu'il a imaginée, intervient un concept qui domine actuellement la Mathématique, celui de groupe d'opérations.

Considérons n nombres $x_1, x_2, ..., x_n$ et écrivons-les dans un ordre différent $x'_1, x'_2, ..., x'_n$. Si nous remplaçons la première écriture par la seconde, c'est-à-dire x_1 par x'_1, x_2 par x'_2, ..., x_n par x'_n, nous opérons une substitution S. Si nous écrivons les n nombres dans un troisième ordre, $x''_1, x''_2, ..., x''_n$, le passage de la seconde écriture à la troisième est une substitution S'. On pourrait passer directement de la première écriture à la troisième par une substitution S''. On convient de dire que S'' est le produit SS'. On convient en outre de dire que les substitutions S forment un groupe G. Observons que parmi ces substitutions se trouve la substitution identique et que l'inverse d'une substitution est une substitution. Cela étant, soit f(x) un polynome entier et rationnel en x, de degré n et supposons que $x_1, x_2, ..., x_n$ soient les racines de l'équation f(x)=o. Supposons en outre que f(x) soit irréductible, c'est-à-dire ne soit pas le produit de deux polynomes entiers et rationnels. Le groupe G est le groupe de Galois de l'équation f(x)=o et c'est l'étude de sa structure qui indique si l'équation a des racines qui peuvent s'exprimer par radicaux.

Nous reviendrons plus loin sur la notion de groupe.

Pendant longtemps, l'Algèbre a raisonné sur l'ensemble des nombres réels et complexes, nombres qui ont deux lois de composition : l'addition et la multiplication. Actuellement, l'Algèbre abstraite raisonne sur des corps d'éléments, ensembles qui possèdent encore les lois de composition précédentes, mais pas toujours avec les mêmes propriétés. C'est ainsi qu'on peut, par exemple, supposer que la multiplication n'est pas commutative, c'est-à-dire que la valeur du produit de deux éléments dépend de l'ordre dans lequel on les prend.

Venons-en maintenant à la géométrie. Un des axiomes d'Euclide dit que deux corps égaux à un même troisième sont égaux et pour vérifier si deux corps sont égaux, il faut les superposer. Bornons-nous pour plus de simplicité à la géométrie plane. Comment peut-on superposer deux figures d'un même plan? En faisant subir à la première soit une translation T, soit une rotation R autour d'un point, soit une symétrie S par rapport à une droite, soit une combinaison de ces opérations, pour amener cette première figure sur la seconde. Appelons déplacement les opérations précédentes. Le postulat d'Euclide cité plus haut dit que si l'on passe d'une figure F à une figure F' par un déplacement D, puis de la figure F' à une figure F'' par un déplacement D', on peut passer de F à F'' par un déplacement D''. On conviendra de dire que D'' est le produit DD'. Observons que l'inverse d'un déplacement est un déplacement et que le fait de laisser une figure immobile peut être considéré comme le déplacement identique, on voit que les déplacements forment un groupe suivant la définition donnée par Galois. Si nous examinons les propriétés métriques de la géométrie euclidienne, nous voyons que ce sont les propriétés qui restent inaltérées lorsqu'on effectue des déplacements. On dit que ces propriétés sont invariantes vis-à-vis du groupe des déplacements. L'interprétation de Klein est alors celle-ci : Les propriétés métriques de la géométrie euclidienne sont les propriétés invariantes vis-à-vis du groupe des déplacements et celui-ci est appelé groupe principal de cette géométrie.

La géométrie euclidienne s'occupe aussi des figures semblables. Le groupe des déplacements doit être élargi en y faisant entrer des transformations que l'on appelle homothéties. Une homothétie est une opération qui, étant donné un point O, fait correspondre à un point A un point A' de la droite OA tel que la distance OA' soit un multiple constant de la distance OA. On obtiendra ainsi le groupe des similitudes et les propriétés des figures invariantes pour les opérations de ce groupe constituent la géométrie euclidienne. Observons que les déplacements sont des opérations du groupe des similitudes et le groupe des déplacements est ce que l'on appelle un sous-groupe du groupe des similitudes.

Nous avons dit plus haut que Desargues avait introduit les points à l'infini; ce sont des points fictifs que l'on peut définir de la manière suivante : Partons de l'espace de la géométrie euclidienne. En se donnant une droite, on se donne ses points et sa direction. Deux droites parallèles ont même direction. Changeons de vocabulaire en appelant point improprement dit, en abrégé point impropre, la direction d'une droite. Deux droites parallèles ont en commun un point impropre, tout comme deux droites non parallèles ont en commun un point proprement dit, en abrégé point propre. Les points impropres des droites d'un plan forment la droite impropre de ce plan et les points impropres de toutes les droites de l'espace le plan impropre. On voit tout de suite que deux points, propres ou impropres, déterminent une droite propre ou impropre et que trois points, propres ou impropres, non en ligne droite, déterminent un plan propre ou impropre. L'espace projectif est l'espace où l'on ne fait aucune distinction entre les éléments propres et impropres.

Les expressions point à l'infini et point impropre sont synonymes; la seconde est utilisée par les géomètres italiens et a nos préférences.

Quelles sont maintenant les opérations fondamentales de la géométrie projective? Ce sont des opérations appelées homographies qui font correspondre à un point un point et aux points d'une droite les points d'une droite. Ces homographies forment un groupe et la géométrie projective est l'ensemble des propriétés invariantes pour les homographies. Observons que si dans l'espace projectif nous réintroduisons le plan impropre et la notion d'égalité des angles, nous obtenons un sous-groupe qui comprend le groupe des similitudes.

Nous sommes maintenant en mesure d'indiquer au moins sommairement la notion de géométrie due à Klein. Partons d'un espace, par exemple de l'espace projectif et imaginons des opérations T qui font correspondre à un point un ou plusieurs points et supposons que l'ensemble E ce ces opérations jouisse des propriétés suivantes : Le produit TT' de deux opérations de l'ensemble, c'est-à-dire l'opération obtenue en effectuant successivement T, T', est encore une opération de l'ensemble. L'inverse d'une opération de l'ensemble est encore une opération de l'ensemble, ce qui implique que l'identité, qui fait correspondre à un point ce point lui-même, appartient à l'ensemble E. Dans ces conditions, l'ensemble E est un groupe G. Eh bien, selon Klein, la géométrie de groupe principal G est l'ensemble des propriétés qui sont invariantes pour les opérations du groupe G.

Parmi les opérations de l'espace projectif se trouvent les transformations birationnelles, souvent appelées transformations crémoniennes du nom du géomètre italien Cremona qui en fit le premier la théorie. Une transformation crémonienne fait correspondre à un point un et un seul point et inversement. De plus, les formules qui lient les coordonnées de deux points homologues s'expriment au moyen de polynomes. Ces transformations forment un groupe : le groupe crémonien. Dans la géométrie qui a pour groupe principal le groupe crémonien, géométrie souvent appelée algébrique, on répartit les êtres géométriques (courbes, surfaces,...) en classes, deux êtres appartenant à la même classe si l'on peut passer de l'un à l'autre par une transformation birationnelle. Il s'agit alors de déterminer un « modèle » de chaque classe. Dans le cas des courbes, la théorie a été faite par Brill, Noether, C. Segre, Castelnuovo,..., dans le cas des surfaces, par Enriques, Castelnuovo, Severi, ...; c'est un des plus beaux fleurons de l'École mathématique italienne. Mais ces théories sont loin d'être terminées, il reste de nombreux points à élucider, mais il s'agit de questions très difficiles. Notons d'ailleurs que ces questions sont en liaison étroite avec l'Analyse, l'Algèbre et la Topologie.

D'autres groupes de transformations ont été considérés par Sophus Lie et en particulier les groupes continus finis dont les opérations font correspondre à un point un ou plusieurs points, s'expriment par des fonctions continues et dépendent d'un nombre fini de paramètres. Le groupe des déplacements, celui des similitudes, le groupe projectif sont des groupes de Lie, mais le groupe crémonien n'est pas un groupe continu car dans la définition d'une transformation crémonienne figurent des nombres entiers. Les travaux de Lie ont été poursuivis par Engel et surtout par Elie Cartan. Le problème de construire une géométrie dont le groupe principal est un groupe de Lie déterminé fait l'objet des recherches actuelles de plusieurs géomètres.

Les notions d'espace et de géométrie ont été étendus de bien des manières. De nombreux mathématiciens étudient actuellement la Topologie. On peut arriver au concept de cette science en suivant une voie tracée par F. Enriques. Deux notions fondamentales interviennent en géométrie élémentaire : celle de mesure et celle de ligne droite. Si nous laissons tomber celle de mesure, nous obtenons la Géométrie projective. Si au contraire nous laissons tomber celle de ligne droite, nous obtenons une géométrie métrique générale. Si nous laissons tomber les deux notions, nous obtenons une géométrie très générale, que l'on serait tenté d'appeler la géométrie du caoutchouc. Cette géométrie générale est la Topologie ou Analysis Situs. Dans cette géométrie, un cercle et une ellipse, par exemple, sont deux figures identiques car on peut en déformant l'une sans déchirure ni duplicature, appliquer une des figures sur l'autre.

La Topologie s'est révélée comme étant à la base de la plupart des théories mathématiques.

La Géométrie infinitésimale étudie les courbes et les surfaces dans le voisinage d'un de leurs points. Considérons un arc de courbe plane ou gauche C d'extrémités A, B. Si, lorsque B tend vers A sur la courbe, la droite AB a une limite unique et bien déterminée a, A est dit point ordinaire de la courbe et a est la tangente en ce point. Si la courbe C est gauche et si le plan déterminé par a et B a une limite unique et bien déterminée lorsque B tend vers A sur la courbe, cette limite est un plan α osculateur à la courbe en A. Cela étant, comment mesurer la courbure de l'arc C? Une première évaluation sera obtenue en prenant la mesure θ de l'angle fait par la tangente a en A avec la parallèle à la tangente en B menée par A. Une seconde évaluation sera obtenue en prenant le rapport de l'angle θ et de la longueur de l'arc AB; c'est la courbure moyenne de l'arc. On appelle courbure de la courbe C au point A la limite de la courbure moyenne de l'arc AB lorsque B tend vers A sur la courbe. Si C est un arc de courbe gauche, on définit d'une manière analogue la torsion de différentiables, c'est là une hypothèse de « commodité ». On raconte qu'Henri Lebesgue, alors élève à l'Ecole Normale Supérieure, dit un jour à un camarade, en lui montrant un mouchoir chiffonné : « une surface développable ». Cette boutade, et d'autres du même genre, qui devaient d'ailleurs conduire leur auteur à de remarquables découvertes, montre que les hypothèses de commodité excluent parfois des solutions des questions traitées.

La Relativité générale d'Einstein a suscité de nombreuses recherches sur les variétés géométriques; il est malheureusement impossible d'en rendre compte sans faire intervenir un symbolisme mathématique assez fourni. Signalons cependant qu'Elie Cartan a été conduit à construire une géométrie très générale qui contient comme cas particulier toutes les géométries connues. Le concept de Géométrie cartanienne contient celui des géométries de Klein et aussi une géométrie créée autrefois par Riemann, basée sur la notion de distance, qui ne rentrait pas dans le cadre de Klein.

Nous dirons quelques mots des géométries dites non-euclidiennes, qui provoquèrent jadis tant de discussions. Du postulat le plus connu de la géométrie d'Euclide résulte que par un point hors d'une droite, on peut mener une et une seule parallèle à cette droite. Les nombreuses tentatives pour démontrer ce postulat ont toutes échoué, et pour cause. On peut construire des géométries où par un point hors d'une droite on peut mener deux parallèles à cette droite et des géométries où deux droites quelconques se rencontrent toujours en un point (propre). De telles géométries rentrent dans la géométrie euclidienne moyennant un dictionnaire convenablement choisi. Construisons, avec Poincarré, une géométrie du premier type.

Traçons dans un plan μ une droite a et supposons que nous ne puissions franchir cette droite, c'est-à-dire que nous resterons toujours dans une des régions du plan déterminées par cette droite. Considérons dans ce demi-plan les demi-cercles ayant leur centre sur la droite a et convenons de les appeler droites du demi-plan. Nous dirons que deux droites sont parallèles lorsque les demi-cercles correspondants se rencontrent en un point de la droite a. Si nous considérons un demi-cercle C et un point P qui ne lui appartient pas, nous pouvons mener par P deux demi-cercles C′, C″ rencontrant C chacun en un point de a. Utilisons notre vocabulaire : Par le point P, passent deux droites C′, C″ parallèles à la droite C. Il y a une infinité de droites passant par P et ne rencontrant pas C et une infinité de droites passant par P et rencontrant C en un point .Ce sont les non-sécantes et les sécantes de C. Evidemment, on dira que prendre des cercles pour des droites semble assez anormal. Mais supposons que la droite a passe par le centre de la Terre. Un dessinateur de nos régions saura-t-il dessiner les cercles C′, C″ de

Lorsque l'on examine les progrès réalisés dans ces dernières années par la physique, la chimie, l'art de l'ingénieur... on est frappé par l'ampleur de ceux-ci. Si l'on examine la chose de plus près, on constate qu'il est fait appel à des théories de plus en plus élevées des Mathématiques et parfois même à des questions qui ne peuvent être résolues par les Mathématiques classiques. Il est loin le temps où l'ingénieur pouvait se contenter de simples connaissances d'Analyse infinitésimale. La conclusion qui s'impose est que si un pays veut participer à l'évolution moderne des techniques, il doit avant tout posséder une bonne École mathématique.