Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 41e année, nº 9-10, 1972, pp. 445-449

UNE VARIÉTÉ ALGÉBRIQUE A TROIS DIMENSIONS DOUBLE A SECTIONS HYPERPLANES BICANONIQUES

par Lucien GODEAUX

Nous considérons dans cette note la variété image Ω d'une involution cyclique du troisième ordre, privée de points unis, appartenant à la variété intersection complète de deux hypersurfaces cubiques et d'une hyperquadrique d'un espace à six dimensions. La détermination des caractères de la variété Ω se déduit de nos recherches sur les involutions cycliques [1], mais on peut prendre comme modèle projectif de la variété Ω une variété double Ω' dont les sections hyperplanes sont les surfaces bicanoniques de Ω. La variété Ω' appartient à une section hyperplane de la variété lieu des droites joignant les points d'une surface de Veronese et d'une quadrique (surface de Segre) situées dans des espaces qui ne se rencontrent pas, dans un espace à neuf dimensions [2].

1. Soit H l'homographie de période trois d'un espace S_6 à six dimensions, d'équations

$$\frac{x_0'}{x_0} = \frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{x_2} = \frac{y_1'}{\varepsilon y_1} = \frac{y_2'}{\varepsilon y_2} = \frac{z_1'}{\varepsilon^2 z_1} = \frac{z_2'}{\varepsilon^2 z_2},$$

où ε est une racine primitive d'ordre trois de l'unité. Cette homographie possède trois axes ponctuels : un plan σ_0 $(y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0)$, deux droites σ_1 $(x_0 = x_1 = x_2 = z_1 = z_2 = 0)$ et σ_2 $(x_0 = x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0)$.

Considérons la variété algébrique V intersection complète de deux hypersurfaces cubiques

$$\varphi_3(x_0, x_1, x_2) + \varphi_3'(y_1, y_2) + \varphi''_3(z_1, z_2) + \varphi_{111}(x_0, x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2) = 0,$$
$$\psi_3(x_0, x_1, x_2) + \psi_3'(y_1, y_2) + \psi''_3(z_1, z_2) + \psi_{111}(x_0, x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2) = 0,$$

et d'une hyperquadrique

$$f_2(x_0, x_1, x_2) + f_{11}(y_1, y_2; z_1, z_2) = 0,$$

ou φ_3, φ_3', φ''_3, ψ_3, ψ_3', ψ''_3, sont des formes cubiques, φ_{111}, ψ_{111} des formes trilinéaires, f_2 une forme quadratique et f_{11} une forme bilinéaire de leurs arguments.

La variété V, d'ordre 18, est transformée en soi par l'homographie H et celle-ci détermine sur la variété une involution I d'ordre trois. Cette involution est privée de points unis, car les équations

$$\varphi_3 = 0,\ \psi_3 = 0,\ f_2 = 0;\ y_1 = y_2 = 0,\ z_1 = z_2 = 0,$$
$$\varphi_3' = 0,\ \psi_3' = 0,\ x_0 = x_1 = x_2 = 0,\ z_1 = z_2 = 0,$$
$$\varphi''_3 = 0,\ \psi''_3 = 0,\ x_0 = x_1 = x_2 = 0,\ y_1 = y_2 = 0,$$

sont respectivement privées de solutions.

[1] *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications.* Rome, Éditions Cremonese, 1963.
[2] Variétés algébriques en relation avec les variétés de Veronese et de Segre. *Bulletin de l'Académie roy. de Belgique*, 1972, pp. 415-422.

Les sections hyperplanes F de V sont les surfaces canoniques de cette variété.

Une surface canonique F est donc l'intersection dans un espace S_5 à cinq dimensions de deux hypersurfaces cubiques et d'une hyperquadrique. Les courbes canoniques d'une telle surface sont découpées par les hyperquadriques. Dans S_5, il y a 21 hyperquadriques linéairement indépendantes, dont il faut défalquer l'hyperquadrique contenant F. Le genre arithmétique de F est donc égal à 20. La surface F étant l'intersection complète de trois hypersurfaces est donc régulière et ses genres sont $p_a = p_g = 20$.

La section de V par un espace à quatre dimensions est une courbe C sur laquelle la série canonique est découpée par les hypersurfaces cubiques de cet espace à quatre dimensions. Ces hypersurfaces cubiques linéairement indépendantes sont au nombre de 35. Il faut en défalquer celles qui passent par C et celles qui sont formées de l'hyperquadrique passant par C et d'un hyperplan. Le genre de la courbe C est donc $\omega_1 = 28$.

Les surfaces F *sections hyperplanes de* V *sont de genres* $p_a = p_g = 20$. *Deux de ces surfaces se rencontrent suivant une courbe de genre* 28.

Le genre géométrique de V est $P_g = 7$.

D'après une formule de Severi [3], on a

$$2P_a = \omega_0 - \omega_1 + \omega_2 + 4,$$

où P_a est le genre arithmétique de V, $\omega_0 = 18$ le degré du système $|F|$, $\omega_1 = 28$ le genre de la courbe commune à deux surfaces F et $\omega_2 = 20$ le genre arithmétique de F. Cela donne $P_a = 7$.

La variété V *est complètement régulière et a les genres* $P_a = P_g = 7$.

2. Le système $|F|$ contient trois systèmes linéaires composés au moyen de l'involution I. Ce sont :

Le système $|F_0|$ découpé par les hyperplans passant par σ_1 et σ_2.

Un système $|F_1|$ découpé par les hyperplans passant par σ_0 et σ_2.

Un système $|F_2|$ découpé par les hyperplans paassnt par σ_0 et σ_1.

Le système bicanonique $|2F|$ est découpé sur F par les hyperquadriques. Il contient trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I. Nous les désignerons par $|(2F)_0|$, $|(2F)_1|$, $|(2F)_2|$. Ils contiennent respectivement les surfaces $2F_0$, $F_0 + F_1$, $F_0 + F_2$ et sont représentés par les équations

$$\alpha_2(x_0, x_1, x_2) + \alpha_{11}(y_1, y_2; z_1, z_2) = 0,$$
$$\beta_2(y_1, y_2) + \beta_{11}(x_0, x_1, x_2; z_1, z_2) = 0,$$
$$\gamma_2(z_1, z_2) + \gamma_{11}(x_0, x_1, x_2; y_1, y_2) = 0,$$

où α_2, β_2, γ_2 sont des formes quadratiques et α_{11}, β_{11}, γ_{11} des formes bilinéaires de leurs arguments. Le premier de ces systèmes contient l'hyperquadrique contenant V, ils ont donc tous trois la dimension huit.

Soit Ω une variété image de l'involution I. Aux surfaces canoniques de Ω correspondent sur V des surfaces appartenant à l'un des systèmes $|F_0|$, $|F_1|$, $|F_2|$. Précisément c'est celui de ces systèmes sur une surface duquel le système adjoint appartenant à I découpe le système de dimension minimum [4].

[3] Fondamenti per la Geometria sulle varietà algebriche. *Rendiconti del Circulo matematico di Palermo*, 2° sem. 1909, pp. 38-87.

[4] Voir notre note : Sur une propriété des correspondances rationnelles entre deux variétés algébriques. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1938, pp. 164-170.

Le système $|(2F)_0|$ contient ∞^2 hyperquadriques formées d'un hyperplan passant par une surface F_0 et des hyperplans passant par σ_1, σ_2. Il découpe donc sur la surface F_0 un système de dimension $8 - 2 = 6$. Par contre les systèmes $|(2F)_1|$, $|(2F)_2|$ donnent des systèmes de dimension 7, car ils comprennent une hyperquadrique formée de l'hyperplan de F_0 et d'un hyperplan passant par σ_0, σ_2 ou par σ_0, σ_1.

Un raisonnement analogue montre que sur une surface F_1 ou F_2, les systèmes $|(2F_0|$, $(2F)_1$,$|(2F)_2|$ découpent des systèmes de dimensions 7, 7, 8 ou 7,8,7.

Aux surfaces canoniques Φ_0 de Ω correspondent donc les surfaces F_0 et le système canonique de Ω est un réseau. Comme Ω est, comme V, une variété complètement régulière, cette variété a les genres $P'_a = P'_g = 3$.

Entre le genre arithmétique p'_a d'une surface Φ_0 et le genre arithmétique $p_a = 20$ de la surface F_0 homologue, on a la relation

$$3(p'_a + 1) = p_a + 1,$$

donc $p'_a = 6$.

Entre le genre ω'_1 d'une courbe Γ commune à deux surfaces Φ_0 et le genre $\omega_1 = 28$ de la courbe C correspondante, on a la relation

$$3(\omega'_1 - 1) = \omega_1 - 1,$$

d'où $\omega'_1 = 10$.

On vérifie que la formule de Severi donne bien

$$2P'_a = 6 - 10 + 6 + 4 = 2 \,.\, 3.$$

La variété Ω a les genres $P'_a = P'_g = 3$ et ses surfaces canoniques Φ_2 ont les genres $p_a = p_g = 6$.

3. Les surfaces bicanoniques de Ω correspondent aux surfaces $(2F)_0$.

Rapportons projectivement les hyperquadriques découpant les surfaces $(2F)_0$ aux hyperplans d'un espace S_2 à neuf dimensions en posant

$$\rho X_{ik} = x_i x_k = x_k x_i, \qquad (i, k = 0, 1, 2)$$
$$\rho Y_{jh} = y_j z_h \qquad (j, h = 1\ , 2).$$

L'élimination des x, y, z entre ces équations donnent celles que l'on déduit en exprimant que le déterminant $|X_{ik}|$a la caractéristique un et l'équation

$$Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21} = 0.$$

Les premières équations représentent une surface Ψ de Veronese appartenant à un espace Σ_5 d'équations $Y_{jh} = 0$ et la dernière équation représente une quadrique Q (surface de Segre) située dans un espace Σ_3 d'équations $X_{ik} = 0$.

A l'involution du troisième ordre engendrée par H dan S_6 correspondent les points de la variété W lieu des droites joignant les points de Ψ et de Q. C'est une variété du huitième ordre. La variété W a cinq dimensions et l'involution qu'elle représente en a six. Comme nous l'avons établi récemment [5]. aux points d'une droite de W correspondent les groupes de l'involution appartenant à un plan déterminé par trois points appartenant aux axes σ_0, σ_1, σ_2 de H. D'une manière précise, soit x un point de σ_0, y un point de σ_1 et z un point de σ_2. Au point x correspond un point X de Ψ et au couple y, z correspond un point Y de Q. Au plan xyz correspond donc la droite XY. Soient P un point de la droite XY, P_1, P_2, P_3 le groupe de l'involution qui lui correspond dans le plan xyz. Les droites xP_1, xP_2, xP_3 se correspondent dans H. Eh bien, lorsque le point P_1 varie sur la droite xP_1

[1] Variétés algébriques... (*loc. cit.*).

supposée fixe, les points P_2, P_3 décrivent les droites xP_2, xP_3 mais le point P reste fixe. Lorsque P décrit la droite XY, le terne de droites xP_1, xP_2, xP_3 varie dans les faisceau de sommet x.

Il y a une correspondance biunivoque entre les ∞^4 plans xyz et les ∞^4 droites de la variété W. Aux ∞^6 groupes de l'involution dans S_6 correspondent les ∞^5 points de W.

A l'hyperquadrique contenant la variété V correspond un hyperplan Σ_8 de S_9.

4. Appelons Ω' la variété qui correspond sur W aux groupes de l'involution I. Soient P un point de Ω', XY la droite de W passant par ce point, xyz le plan qui lui correspond dans S_6. Les hypersurfaces définissant V rencontrent ce plan suivant deux cubiques γ_3, γ_3' et une conique γ_2. Les cubiques γ_3, γ_3' ne passent pas par les points x, y, z, mais la conique γ_2 passe par les points y, z. Ces trois courbes ont en commun trois points P_1, P_2, P_3 formant un groupe de l'involution I. Les droites xP_1, xP_2, xP_3 recnontrent encore γ_2 en des points P_1', P_2', P_3'. Au point P_1', H fait correspondre un point qui doit appartenir à la conique γ_2 et à la droite xP_2, c'est donc le point P_2'. De même, à ce point H fait correspondre P_3'. Les points P_1', P_2', P_3' forment donc un groupe de l'involution I et à un point P de Ω' correspondent donc deux groupes de I.

Pour que les groupes $P_1P_2P_3$ et $P_1'P_2'P_3'$ coïncident, il faut que les droites xP_1, xP_2, xP_3 soient tangentes à la conique γ_2 et par conséquent confondues avec la droite xy ou avec la droite xz. Aux couples yz contenant un point y correspondent les points d'une droite de Q et aux couples contenant un point z, les points d'une droite de la seconde série de génératrices rectilignes de Q. On en conclut que les points de Q sont de diramation pour la correspondance (1, 2) existant entre les points de Ω' et les groupes de l'involution I.

La variété Ω est donc équivalente à la variété Ω' comptée deux fois, la quadrique Q étant la surface de diramation.

Le système bicanonique $|(2F)_0|$ a le degré 8.18, donc la variété Ω' a l'ordre 24.

On peut prendre comme modèle projectif de la variété Ω, une variété double Ω' avant comme surface de diramation la quadrique Q. La variété Ω' est tracée sur une section hyperplane de la variété W.

5. On peut obtenir les équations de la variété Ω' de la manière suivante :

Les équations des hypersurfaces cubiques passant par V peuvent s'écrire

$$x_0A_0 + x_1A_1 + x_2A_2 = 0,$$
$$x_0B_0 + x_1B_1 + x_2B_2 = 0,$$

où les A et les B sont des polynomes du premier degré homogènes en X_{ik}, Y_{jh}.

En multipliant membre à membre ces deux équations, on obtient l'équation

$$\Sigma X_{ik}A_iB_k = 0$$

d'une hypersurface cubique passant par Ω'.

En élevant au carré les équations précédentes, on obtient deux hypersurfaces cubiques d'équations

$$\Sigma X_{ik}A_iA_k = 0 \qquad (i, k = 0, 1, 2)$$
$$\Sigma X_{ik}B_iB_k = 0$$

qui passent par la variété Ω'.

En multipliant les équations par x_i, on obtient les équations

$$\Sigma X_{0i} A_i = 0, \quad \Sigma X_{0i} B_i = 0, \qquad (i = 0, 1, 2)$$

de six hyperquadriques passant par la variété Ω'.

6. Une surface bicanonique de V, c'est-à-dire une surface F + F, a le genre arithmétique égal à la somme des genres arithmétiques des surfaces F et du genre de la courbe commune à ces surfaces, donc à $2.20 + 28 = 68$. Le genre arithmétique d'une surface bicanonique de Ω est donc, d'après la formule déjà utilisée plus haut, égal à 22.

Aux surfaces F_1, F_2 correspondent sur Ω des surfaces Φ_1, Φ_2 de genre arithmétique six. Ces surfaces appartiennent à des faisceaux $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$ dont la base est une courbe de genre 10.

L'involution I étant dépourvue de points unis, on a

$$3\Phi_0 \equiv 3\Phi_1 \equiv 3\Phi_2$$

et la variété Ω a le diviseur de Severi égal à trois.

Liège, le 24 août 1972.