Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 38e année, nº 1-2, 1969, pp. 5-7

SUR LES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES A TROIS DIMENSIONS APPARTENANT A UNE VARIÉTÉ DE SEGRE

par LUCIEN GODEAUX
Membre de la Société

Le but de cette note est de déterminer le système canonique d'une variété algébrique à trois dimensions appartenant à la variété de Segre représentant les couples de points de deux plans. Cette détermination résulte de l'application du théorème suivant : Si sur une variété algébrique à trois dimensions, il existe une congruence algébrique de courbes algébriques, sur une courbe de cette congruence, le groupe des points focaux, augmenté du groupe des points de rencontre de la courbe avec une surface canonique de la variété, donne un groupe équivalent aux groupes canoniques de la courbe [1].

Nous commençons par établir un théorème sur les variétés de Segre représentant les couples de points de deux espaces linéaires. On sait qu'une telle variété contient deux systèmes d'espaces linéaires. Nous déterminons une variété algébrique découpant des variétés données sur ces espaces linéaires.

1. Considérons la variété de Segre W représentant les couples de points de deux espaces linéaires S_n, à n dimensions et S_m, à m dimensions, située dans un espace S_N à $N = mn + m + n$ dimensions. Soient $y_0, y_1, \dots, y_n$ les coordonnées projectives des points de S_n et $z_0, z_1, \dots, z_m$ celles des points de S_m. En posant

$$X_{ik} = y_i z_k, \quad (i = 0, 1, \dots, n\,;\ k = 0, 1, \dots, m)$$

les équations de la variété W s'obtiennent en écrivant que le déterminant

$$| X_{ik} |$$

est de caractéristique un.

La variété W est d'ordre

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}$$

et a la dimension $m + n$.

On sait que la variété W contient :

1º Un système d'espaces linéaires η à n dimensions, dépendant de m paramètres, tel que par un point de W passe un seul espace η et que deux espaces η ne se rencontrent pas.

[1] Congruences de courbes sur une variété algébrique à trois dimensions. *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*, 1967, pp. 1139-1153 ; 1968, pp. 141-143.
Voir également notre note : Sur les variétés algébriques à trois dimensions contenant une congruence irrationnelle de courbes. *Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei*, novembre 1967, pp. 325-328. Communication faite au Congresso della Unione Matematica Italiana à Trieste, en octobre 1967.

2° Un système d'espaces linéaires ζ à m dimensions, dépendant de n paramètres, tel que par un point de W passe un seul espace ζ et que deux espaces ζ ne se rencontrent pas.

Un espace η et un espace ζ ont un point commun.

Supposons qu'il existe une variété algébrique V rencontrant les plans η suivant des variétés φ à $n-1$ dimensions, d'ordre μ, et les espaces ζ suivant des variétés ψ à $m-1$ dimensions, d'ordre ν. Comment construire cette variété?

L'espace η représente les couples de points y, z dont le point z est fixe et on peut prendre pour coordonnées des points de l'espace η les quantités

$$X_{00}, X_{10}, \ldots, X_{n0} \tag{1}$$

proportionnelles aux quantités $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

L'équation de la variété φ sera, égalé à 0, un polynome homogène et de degré μ par rapport aux quantités (1), dont les coefficients dépendent des z.

Dans un espace ζ, on peut prendre comme coordonnées les quantités

$$X_{00}, X_{01}, \ldots, X_{0m} \tag{2}$$

proportionnelles à $z_0, z_1, \ldots, z_m$. L'équation de la variété ψ sera un polynome homogène de degré ν par rapport à ces coordonnées, les coefficients dépendant des y.

L'équation de la variété V peut donc s'écrire sous la forme

$$\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 + \ldots + \varphi_r\psi_r = 0, \tag{3}$$

les φ_i étant des polynomes de degré μ, homogènes, par rapport aux quantités (1) et les ψ_i des polynomes homogènes de degré ν par rapport aux quantités (2).

Dans l'équation (3), remplaçons les X_{ik} par $y_i z_k$ et remarquons que le polynome obtenu peut être divisé par $y_0^\mu z_0^\nu$. Il reste une relation

$$f(y, z) = 0 \tag{4}$$

de degré μ par rapport aux y et degré ν par rapport aux z, homogène par rapport à chacune de ces séries de variables. L'équation (4) donne une correspondance (μ, ν) entre les y et les z.

Si $\mu \geqslant \nu$, en multipliant les deux membres de l'équation (4) par un polynome de degré $\mu - \nu$ en z et en introduisant les X_{ik}, on obtient l'équation d'une hypersurface d'ordre μ de S_N, représentant la variété V augmentée de $\mu - \nu$ espaces ζ.

2. Nous allons appliquer cette remarque à la détermination du système canonique d'une variété algébrique à trois dimensions tracée sur la variété de Segre représentant les couples de points de deux plans.

Supposons donc $m = n = 2$. La variété de Segre W à quatre dimensions est d'ordre six et située dans un espace S_8 à huit dimensions.

Un hypersurface V, d'ordre μ, coupe la variété W suivant une variété V′ à trois dimensions.

La variété V coupe un plan η suivant une courbe φ d'ordre μ. Sur la variété V′, nous avons donc une congruence de courbes φ d'ordre μ et comme deux plans η ne peuvent se rencontrer, cette congruence est dépourvue de points focaux. Par conséquent le nombre des points de rencontre d'une courbe φ avec une surface canonique de V′ est équivalent à un groupe canonique de la courbe φ considérée. Or, un tel groupe est déterminé sur une courbe plane φ par les adjointes d'ordre $\mu - 3$. Une surface canonique de la variété V′ coupe donc les plans η suivant des courbes d'ordre $\mu - 3$.

Le même raisonnement montre qu'une surface canonique de la variété V′ rencontre les plans ζ suivant des courbes d'ordre $\mu - 3$.

Une surface canonique de V′ représente donc une liaison ($\mu - 3$, $\nu - 3$) entre les plans (y), (z) et cette liaison est représentée par un polynome homogène de degré $\mu - 3$ en y_0, y_1, y_2 dont les coefficients sont des polynomes homogènes de degré $\mu - 3$ en z_0, z_1, z_2. En introduisant les quantités $X_{ik} = y_i z_k$, cette relation donne l'équation d'une hypersurface d'ordre $\mu - 3$ de S_8.

Les surfaces canoniques d'une variété à trois dimensions découpée dans un espace à huit dimensions sur la variété de Segre W_4^6 *représentant les points de deux plans par une hypersurface d'ordre* μ, *sont découpées par les hypersurfaces d'ordre* $\mu - 3$.

Si $\mu = 3$, la variété V′ possède une surface canonique d'ordre zéro.

Si $\mu = 4$, les surfaces canoniques de la variété V′ sont découpées par les hyperplans.

Liège, le 23 décembre 1968.