Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 36e année, nº 3-4, 1968, pp. 136-140

CONSTRUCTION DU SYSTÈME CANONIQUE D'UNE SURFACE

par LUCIEN GODEAUX
Membre de la Société

Dans nos recherches sur les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique F, nous avons appelé point uni de première espèce un point tel que la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution détermine dans le voisinage de ce point l'identité. En d'autres termes, si l'on se réfère à un modèle projectif de la surface F sur lequel l'involution est engendrée par une homographie de l'espace ambiant, celle-ci détermine dans le plan tangent à F en un point uni de première espèce, une homologie ayant le point uni comme centre. Nous avons indiqué la construction d'une surface contenant une involution cyclique n'ayant que des points unis de première espèce (1). Reprenant l'étude de cette surface, nous avons déterminé une image Φ de l'involution et construit son système canonique. Nous nous sommes aperçu que la surface Φ était toujours l'image d'une involution du type étudié. Cela nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Si l'on considère dans un espace linéaire à $2p+1$ dimensions, deux courbes rationnelles normales C_1, C_2 d'ordre p dont les espaces ambiants ne se rencontrent pas, la variété lieu des droites s'appuyant sur C_1, C_2 est coupée par une hypersurface d'ordre n suivant une surface Φ dont le système canonique est la somme de deux systèmes linéaires de courbes : l'un est découpé sur Φ par les surfaces lieux des droites passant par les points homologues d'une correspondance $(p-2, p-2)$ entre les courbes C_1 ,C_2, l'autre est découpé sur Φ par les hypersurfaces d'ordre $n-2$.

1. Considérons l'homographie biaxiale H de période p

$$x_0' : x_0' : x_0' : x_0' = x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon x_4$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité. Elle possède deux axes s_1, s_2 d'équations respectives

$$x_3 = x_4 = 0, \quad x_1 = x_2 = 0.$$

Pour plus de simplicité, nous supposerons p premier.

Représentons par $\varphi_{i,k}\,(y_1, y_2\,;\, z_1, z_2)$ un polynome entier et rationnel de degré i par rapport aux variables $y_1^p, y_1^{p-1}\,y_2, \ldots, y_2^p$ dont les coefficients sont des polynomes entiers et rationnels par rapport à $z_1^p, z_1^{p-1}\,z_2, \ldots, z_1^p$. L'équation

$$\varphi_{n,0} + \varphi_{n-1,1} + \cdots + \varphi_{n-i,i} + \cdots + \varphi_{1,n} = 0 \tag{1}$$

Manuscrit reçu le 25 avril 1968.

(1) Voir notre ouvrage sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Cremonese, 1963).

représente une surface F d'ordre pn, transformée en soi par l'homographie H. Sur cette surface, cette homographie engendre une involution cyclique I d'ordre p, présentant $2pn$ points unis, intersections de F et de s_1, s_2.

En un de ces points unis, le plan tangent à F passe par celle des droites s_1, s_2 à laquelle il n'appartient pas. Dans ce plan, H détermine une homologie dont le centre est le point uni. Celui-ci est donc uni de première espèce. Il en résulte que sur la surface F, l'involution I possède $2pn$ points unis de première espèce.

2. Nous désignerons par Φ une surface image de l'involution I. Nous pouvons supposer que sur le modèle projectif de Φ considéré, les $2pn$ points de diramation sont isolés.

On sait que les courbes canoniques de la surface Φ passent $p - 2$ fois par chacun des points de diramation, par conséquent à ces courbes correspondent sur F des courbes K_0 ayant en chaque point uni un point multiple d'ordre $p - 2$. Précisons ce point. Soit O un point uni appartenant à la droite s_1 par exemple. Le plan tangent à F en ce point est le plan Os_2. Dans ce plan, les courbes K_0 doivent avoir un point multiple d'ordre $p - 2$ en O.

Les courbes canoniques K de F sont découpées par les adjointes F' d'ordre $pn - 4$. Désignons par F'_0 les surfaces d'ordre $pn - 4$ découpant sur F les courbes K_0

Les surfaces F'_0 rencontrent la droite s_1 en pn points et par conséquent contiennent cette droite. Si la droite s_1 est simple pour F'_0, le plan tangent en O à cette surface passe par s_1, ce qui est absurde si $p > 5$. Sous cette hypothèse, les plans tangents à F'_0 et à F ayant $p - 2$ tangentes communes doivent coïncider et on conclut que O est multiple pour F'_0.

Si r est une des tangentes à K_0 en O, le plan $s_1 r$ est tangent à F'_0 en O. La surface F'_0 présente donc $p - 2$ plans tangents en O et la droite s_1 de même que la droite s_2 est multiple d'ordre $p - 2$ pour les surfaces F'_0.

On observera qu'une droite s'appuyant sur s_1, s_2 rencontre la surface F en n groupes de l'involution I et une surface F'_0 en $np - 4 - 2(p - 2) = p(n - 2)$ points en dehors de s_1, s_2. On doit donc avoir $n \geqslant 2$.

Pour former l'équation des surfaces F'_0, observons que l'équation d'une surface d'ordre $2p - 4$ passant $p - 2$ fois par les droites s_1, s_2 peut s'écrire

$$\varphi_{p-2,p-2} = 0. \tag{2}$$

D'autre part, une surface d'ordre $p(n - 2)$ transformée en soi par H a pour équation

$$\varphi_{n-2,0} + \varphi_{n-3,1} + \cdots + \varphi_{0,n-2} = 0. \tag{3}$$

Les surfaces F'_0 ont donc comme équation

$$\varphi_{p-2,p-2}\,(\varphi_{n-2,0} + \varphi_{n-2,1} + \cdots + \varphi_{0,n-2}) = 0$$

où les produits des coefficients des deux facteurs sont remplacés par des quantités quelconques.

Si l'on désigne par F'_{00} les surfaces d'équation (2) et par F'_{01} les surfaces d'équation (3), on aura

$$|\,F'_0\,| = |\,F'_{00} + F'_{01}\,|.$$

3. Pour obtenir un modèle projectif de la surface Φ, posons

$$\left.\begin{aligned} Y_0 : Y_1 : \ldots : Y_p &= x_1^p : x_1^{p-1}x_2 : \ldots : x_2^p, \\ Z_0 : Z_1 : \ldots : Z_p &= x_3^p : x_3^{p-1}x_4 : \ldots : x_4^p. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Désignons par C_1, C_2 les courbes rationnelles normales d'ordre p,

$$\left\| \begin{matrix} Y_0 Y_1 \ldots Y_{p-1} \\ Y_1 Y_2 \ldots Y_p \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$\left\| \begin{matrix} Z_0 Z_1 \ldots Z_p \\ Z_1 Z_2 \ldots Z_p \end{matrix} \right\| = 0$$

et par σ_1, σ_2 les espaces linéaires à p dimensions qui les contiennent.

Supposons que ces espaces appartiennent à un espace linéaire à $2p + 1$ dimensions ne se rencontrent pas.

Les espaces à $p + 1$ dimensions projetant de σ_2 les points de C_1 forment une variété V_{p+2} d'ordre p. Les espaces à $p + 1$ dimensions projetant C_2 de σ_1 forment une variété V_{p+1}^p d'ordre p. Ces variétés ont en commun une variété V_3 à trois dimensions d'ordre p^2 lieu des droites s'appuyant sur les courbes C_1, C_2.

Si l'on introduit dans l'équation (1) les notations quatre, on obtient dans S_{2p+1} l'équation d'une hypersurface V_{2p}^n générale, d'ordre n. L'intersection de la variété V_3 et de cette hypersurface est un modèle projectif de la surface Φ, d'ordre np^2.

En effet, il y a une correspondance birationnelle entre les droites s'appuyant sur s_1, s_2 et les droites de la variété V_3. A chaque groupe de I situé sur une droite s'appuyant sur s_1, s_2 correspond un point de la surface Φ intersection de V_{2p} avec la droite de V_3 homologue.

Les points de diramation de Φ sont les intersections de V_{2p} avec les courbes C_1, C_2.

4. La surface (2) est engendrée par les droites joignant les points homologues d'une correspondance $(p - 2, p - 2)$ existant entre les ponctuelles s_1, s_2. Il lui correspond sur V_3 une surface engendrée par les droites joignant les points homologues d'une correspondance $(p - 2, p - 2)$ liant les courbes C_1, C_2. Désignons par K_0' la section de V_{2p}^n par cette surface.

A la surface (3) correspond dans S_{2p+1} une hypersurface V_{2p}^{n-2} coupant la surface Φ suivant une courbe K_1'.

Le système canonique de Φ est

$$| K_0' + K_1' |.$$

Si l'on se donne la variété V_3 et l'hypersurface V_{2p}^n, on passe de la surface Φ à la surface F en utilisant les équations (4). Par conséquent les propositions que nous venons d'établir sont vraies indépendamment de l'existence de la surface F et nous pouvons énoncer le théorème donné au début.

5. La surface F et par conséquent la surface Φ sont régulières. Entre les genres $p_a = p_g$ de F et ceux $p_a' = p_g'$ de Φ, nous avons la relation

$$12(p_a + 1) = 12p(p_a' + 1) + 4pn(p - 1)(p - 5).$$

p_a est égal au nombre des surfaces d'ordre $np - 4$ linéairement indépendantes et le calcul de p'_a ne présente guère de difficulté. Bornons-nous à le faire dans le cas $n = 2$, cas où les courbes K'_1 n'existent pas. On a

$$p_a = \binom{2p-1}{3}$$

et $p'_a = (p - 1)^2$.

Liège, le 26 mars 1968.