REMARQUE SUR LES SURFACES AYANT MÊMES QUADRIQUES DE LIE

par Lucien GODEAUX, *Professeur à l'Université de Liége*

Les couples de surfaces ayant mêmes quadriques de Lie ont été étudiées par M. A. DEMOULIN (1) et par nous (2). Considérons une surface (x) engendrée par un point x dont les coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 satisfont au système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable

$$x^{20} + 2\, bx^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2\, ax^{10} + c_2 x = 0,$$

où nous posons

$$x^{ik} = \frac{\partial^{\,i+k} x}{\partial u^i\, \partial v^k},$$

u et v étant les paramètres des asymptotiques de la surface.

Soit Q l'hyperquadrique de l'espace linéaire à cinq dimensions qui représente les droites de l'espace et soient U, V, les points de Q qui représentent les tangentes asymptotiques de la surface (x) au point x. On a

$$U^{10} + 2\, b\, V = 0, \quad V^{01} + 2\, a\, U = 0$$

et les points U, V sont consécutifs dans une suite de Laplace autopolaire par rapport à Q. Reprenons les mêmes notations que dans nos travaux cités plus haut. U_1, U_2,... sont les transformés successifs de Laplace de U dans le sens des v, V_1, V_2,... ceux de V dans le sens des u. On a :

$$\begin{aligned}
2\, U_3 + 2\, U_2 (\log b^3 h_1^2 h_2)^{01} + 2\, U_1[\beta + (\log bh_1)^{02} + (\log bh_1)^{01} (\log b^2 h_1)^{01}] \\
+ [\beta^{01} + 2\, \beta(\log b)^{01}]\, U + 4\, a\alpha\, V + 4\, a\, V_1(\log ak_1)^{10} + 4\, a\, V_2 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\, V_3 + 2\, V_2 (\log a^3 k_1^2 k_2)^{10} + 2\, V_1[\alpha + (\log ak_1)^{20} + (\log ak_1)^{10} (\log a^2 k_1)^{10}] \\
+ [\alpha^{10} + 2\alpha\, (\log a)^{10}]\, V + 4\, b\, \beta\, U + 4\, b\, U_1\, (\log bh_1)^{01} + 4\, b\, U_2 = 0,
\end{aligned}$$

Si les quadriques de Lie de la surface (x) n'ont que deux points carac-

(1) A. DEMOULIN, *Sur la quadrique de Lie*, (*C. R.*, **147**, 493-496 [1908]). — *Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques*, (*Idem*, **179**, 20-22 [1924]).

(2) L. GODEAUX, *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé*, (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 812-826 [1927] ; 31-41 [1928]). — *Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie*, (*Idem*, 1928, pp. 158-186 ; 345-348). — *Sur les congruences de M. Goursat et les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie*, (*Idem*, 455-466 [1928]).

téristiques, la suite de Laplace envisagée a la période six et réciproquement. On doit donc avoir :

$$U_3 + 2\,a\,V_2 = 0, \quad V_3 + 2\,b\,U_2 = 0,$$

$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^{2} + 4\,(b^{01} + c_1) = 0,$$

$$\beta = 2\,(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^{2} + 4\,(a^{10} + c_2) = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(\log\, b\,h_1)^{01} = 0, \quad (\log\, a\,k_1)^{10} = 0.$$

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux relations précédentes soient des identités. On retrouve ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour que les quadriques de Lie de la surface (x) n'aient que deux points caractéristiques.