Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 44e année, n° 1-2, 1975, pp. 5-7

SURFACE A SECTIONS HYPERPLANES CANONIQUES

par LUCIEN GODEAUX
Membre de la Société

On sait qu'il existe une relation étroite entre les variétés algébriques dont le système canonique est celui des sections hyperplanes et les variétés algébriques dont les variétés canonique et pluricanoniques ont l'ordre zéro, les premières étant les sections hyperplanes des secondes. La démonstration est très simple et nous l'exposons au début de cette note. Nous construisons ensuite une surface dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques et la variété à trois dimensions dont les surfaces canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro. Ces variétés nous semblent susceptibles d'applications ultérieures.

1. Soit, dans un espace S_r à r dimensions, une variété algébrique V dont le système canonique coïncide avec le système des sections hyperplanes (Variété projectivement canonique).

Soit d'autre part, dans un espace S_{r+1} à $r+1$ dimensions, une variété W dont les sections hyperplanes sont des variétés V.

Le système canonique d'une section hyperplane V de W étant découpé par les hyperplans, on a

$$|V'| = |V|.$$

La variété canonique de W, $V' - V$, est donc d'ordre zéro.

On a de plus

$$|V''| = |V'| = |V|,$$

donc la variété bicanonique de W est d'ordre zéro.

Il est clair que les adjoints successifs de $|V|$ coïncident avec $|V|$ et que les variétés pluricanoniques de W sont d'ordre zéro.

Inversement, soit W une variété algébrique de S_{n+1} dont les variétés canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro. Cela signifie que tout système linéaire tracé sur W est son propre adjoint. En particulier le système $|V|$ des sections hyperplanes est son propre adjoint, c'est-à-dire que les adjointes V' à une section hyperplane de W sont découpées par les hyperplans.

Si une variété algébrique possède comme sections hyperplanes des variétés dont le système canonique coïncide avec celui des sections hyperplanes, ses variétés canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro. Réciproquement, si une variété algébrique possède des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro, ses sections hyperplanes sont des variétés dont le système canonique coïncide avec celui des sections hyperplanes.

Manuscrit reçu le 20 février 1975.

2. Soit dans un espace S_5 à cinq dimensions, dont les coordonnées sont x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1, une homographie cyclique H de période trois, d'équations

$$\rho x'_i = x_i, \ \rho y'_i = \varepsilon y_i, \ \rho z'_i = \varepsilon^2 z_i, \qquad (i = 0, 1)$$

ε étant une racine cubique primitive de l'Unité. Cette homographie possède trois axes ponctuels qui sont des droites r_1, r_2, r_3.

Les hypersurfaces cubiques de S_5 forment un système linéaire de dimension 75. Elles forment trois systèmes linéaires $|V_1|$, $|V_2|$, $|V_3|$ d'hypersurfaces appartenant à l'involution engendrée par H dans S_5.

Désignons par f_3, φ_3, ψ_3 des formes cubiques de leurs arguments, par f une forme trilinéaire en x, y, z, par $f_{21}(p, q)$, $\varphi_{21}(p, q)$, $\psi_{21}(p, q)$ des formes du second degré en p, linéaires en q. Les équations des hypersurfaces V_1, V_2, V_3 sont

$$|V_1| \qquad f_3(x) + \varphi_3(y) + \psi_3(z) + f(x, y, z) = 0,$$

$$|V_2| \qquad f_{21}(x, y) + \varphi_{21}(y, z) + \psi_{21}(z, x) = 0,$$

$$|V_3| \qquad f'_{21}(x, z) + \varphi'_{21}(y, x) + \psi'_{21}(z, y) = 0.$$

Ces systèmes ont respectivement pour dimensions 19, 17 et 17.

3. Rapportons projectivement les hypersurfaces V_1 aux hyperplans d'un espace S_{19} à 19 dimensions. Il correspond aux groupes de l'involution I engendrée par H dans S_5, une variété W d'ordre 81.

On peut obtenir les équations de W de la manière suivante.

Posons

$$\rho X_i = x_0^i x_1^{3-i}, \quad \rho Y_i = y_0^i y_1^{3-i}, \quad \rho Z_i = z_0^i z_1^{3-i}, \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

$$\rho U_{ijk} = x_i y_j z_k \qquad (i, j, k = 0, 1).$$

On obtient ainsi les équations

$$\begin{Vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{Vmatrix} = 0,$$

$$\begin{Vmatrix} Y_0 & Y_1 & Y_2 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{Vmatrix} = 0,$$

$$\begin{Vmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{Vmatrix} = 0$$

et les équations que l'on obtient en écrivant que le déterminant

$$| U_{ijk}(x, y, z) |$$

est de caractéristique un.

Ce sont les équations de la variété W.

La variété W appartient également à des hypersurfaces cubiques, par exemple aux hypersurfaces

$$X_0Y_0Z_0 = U_{000}^3, \qquad X_1Y_1Z_1 = U_{111}^3, \qquad X_2Y_2Z_2 = U_{222}^3, \qquad X_3Y_3Z_3 = U_{333}^3,$$

$$X_0Y_1Z_1 = U_{000}^2 \, U_{011}, \ \ldots \, .$$

Dans l'espace des X, les premières équations représentent une cubique gauche K_1 correspondant à r_1, les secondes dans l'espace des Y une cubique gauche K_2 homologue de r_2, les troisièmes dans l'espace des Z une cubique gauche K_3 homologue de r_3, enfin les équations obtenues en écrivant que le déterminant $|U|$ est de caractéristique un représentent la variété de Segre K_0 correspondant aux termes de points des droites r_1, r_2, r_3. Ce sont les éléments de diramation pour la correspondance (1, 3) existant entre W et S_5.

4. Soit F la surface intersection de trois hypersurfaces V_1 n'appartenant pas à un même faisceau et rencontrant en des points distincts les droites r_1, r_2, r_3. Cette surface appartient à l'involution I et les groupes de cette involution situés sur F forment à leur tour une involution privée de points unis, ayant pour image la section Φ de la variété W par trois hyperplans indépendants, c'est-à-dire par un espace S_{16} à seize dimensions.

Les courbes canoniques de F sont découpées par les hypersurfaces d'ordre $3.3 - (5 + 1) = 3$ et par conséquent la surface F étant régulière, a les genres arithmétique et géométrique $p_a = p_g = 73$.

Entre les genres arithmétiques $p_a = 74$ de F et celui p'_a de Φ, on a la relation

$$p_a + 1 = 3(p'_a + 1)$$

d'où $p'_a = 17$. La surface Φ étant régulière, on a $p'_g = 17$.

Dans le système canonique de F, il y a trois systèmes appartenant à l'involution I. Ce sont les systèmes $|(F, V_1)|$, $|(F, V_2)|$, $|(F, V_3)|$. Ils ont respectivement les dimensions 16, 17 et 17. Nous avons démontré (*) que celui de ces systèmes qui est le transformé du système canonique de Φ est celui qui a la dimension minimum, c'est-à-dire actuellement $|(F, V_1)|$, qui est le transformé des sections hyperplanes de Φ.

La section de la variété W par un espace à 16 dimensions est une surface dont le système canonique coïncide avec celui des sections hyperplanes.

5. Considérons maintenant la variété V à trois dimensions intersection de deux hypersurfaces V_1 rencontrant en des points distincts les droites r_1, r_2, r_3. L'homographie H détermine sur V une involution privée de points unis et représentée par la section Ω de la variété W par un espace S_{17} à dix-sept dimensions.

Les sections hyperplanes de la variété Ω sont des surfaces Φ dont le système canonique est découpé par les hyperplans. On a donc

$$|\Phi'| = |\Phi|$$

et par conséquent la surface canonique de Ω est d'ordre zéro.

On a ensuite

$$|\Phi''| = |\Phi'| = |\Phi|$$

et la surface bicanonique de Ω est d'ordre zéro.

Les adjoints successifs du système $|\Phi|$ coïncident avec ce système et toutes les surfaces pluricanoniques de Ω sont d'ordre zéro.

La section de la variété W par un espace à dix-sept dimensions est une variété à trois dimensions dont les surfaces canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro.

Liège, le 19 février 1975.

(*) Sur une propriété des correspondances rationnelles entre deux variété salgébriques (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1938, pp. 291-297).