Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 39e année, n° 9-10, 1970, pp. 439-441

UNE VARIÉTÉ ALGÉBRIQUE A TROIS DIMENSIONS A SECTIONS HYPERPLANES DE BIGENRE UN

par LUCIEN GODEAUX
Membre de la Société

Nous avons démontré autrefois que si une variété algébrique à trois dimensions d'ordre $2\pi - 2$, dans un espace S_π à π dimensions, avait pour sections hyperplanes des surfaces dépourvues de courbe canonique mais ayant une courbe bicanonique d'ordre zéro, elle possédait un système linéaire de dimension $\pi - 1$ de surfaces dont toutes les courbes canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro [1].

Reprenant cette question, Fano a démontré que l'on a nécessairement $\pi = 4$, 6, 7, 9 ou 13 [2].

L'objet de cette note est de construire une variété algébrique à sections hyperplanes de bigenre un dans le cas $\pi = 9$. Nous l'obtenons comme image d'une involution d'ordre deux engendrée par une homographie biaxiale harmonique sur l'intersection de deux hyperquadriques dans un espace à cinq dimensions.

Rappelons que nous avons démontré que dans le cas général, les variétés dont il est question sont toujours images d'une involution du second ordre appartenant à une variété à trois dimensions et possédant huit points unis [3].

Nous utiliserons le théorème suivant : Une involution du second ordre engendrée par une homographie sur la surface intersection complète de trois hyperquadriques dans un espace à cinq dimensions a pour image une surface dépourvue de courbe canonique mais possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro si l'involution est privée de points unis, ou une surface dont les courbes canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro si l'involution possède huit points unis [4]

1. Soient dans un espace S_5 à cinq dimensions, deux plans σ_1, σ_2 ne se rencontrant pas et H une homographie harmonique ayant pour axes les plans σ_1, σ_2. Nous indiquerons par y_0, y_1, y_2 les coordonnées d'un point de σ_1 et par z_0, z_1, z_2 celles d'un point de σ_2. Les équations de H sont

$$y'_i = y_i,\ z'_i = -z_i. \quad (i = 0, 1, 2)$$

L'homographie H détermine dans S_5 une involution du second ordre dont l'image peut être obtenue de la manière suivante :

[1] *Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genre zéro et de bigenre un* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1933, pp. 134-140).
[2] *Sulle varietà algebriche a tre dimenzioni le cui sezioni iperpiane sono superficie di genere zero e di bigenere uno* (Memorie delle Società Italiana delle Scienze, 1938, pp. 1-26).
[3] *Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de bigenre un* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1962, pp. 1251-1257).
[4] Voir notre ouvrage *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Roma, Edizioni Cremonese, 1963), pp. 100 et suivantes.

Les hyperquadriques de S_5 transformées en elles-mêmes par H forment deux familles. Les hypersurfaces de la première ont pour équation

$$\varphi_2(y_0, y_1, y_2) + \psi_2(z_0, z_1, z_2) = 0,$$

où φ_2 et ψ_2 sont des formes quadratiques de leurs arguments. Elles ne passent pas par les axes de H. Nous les désignerons par Q_0. Les hyperquadriques de la seconde famille ont pour équation

$$\Sigma\lambda_{ik}y_iz_k = 0$$

et passent par σ_1, σ_2. Nous les désignerons par Q_1.

Posons

$$Y_{ik} = y_iy_k, \ Z_{ik} = z_iz_k, \quad (i, k = 0, 1, 2)$$

Rapportons projectivement les hyperquadriques Q_0 aux hyperplans d'un espace S_{11} à onze dimensions. Aux couples de l'involution correspondent les points d'une variété W_1 dont les équations s'obtiennent en écrivant que les déterminants

$$| Y_{ik} |, \ | Z_{ik} | \quad (i, k = 0, 1, 2)$$

sont de caractéristique un.

Les premières de ces équations représentent une surface de Veronese Ψ_1 située dans un espace Σ_1 à cinq dimensions $Z_{ik} = 0$. Les secondes représentent une surface de Veronese Ψ_2 située dans l'espace Σ_2 à cinq dimensions $Y_{ik} = 0$.

La variété W_5 est l'intersection du cône projetant Ψ_1 de Σ_2 et du cône projetant Ψ_2 de Σ_1. Elle est le lieu des droites s'appuyant sur Ψ_1 et Ψ_2. Son ordre est égal à 16 et elle passe quatre fois par les surfaces Ψ_1, Ψ_2.

2. Désignons par Q_0' et par Q_1' les variétés qui correspondent sur W_5 respectivement aux hyperquadriques Q_0, Q_1. A une hyperquadrique Q quelconque de S_5 correspond sur W_5 une variété Q' qui correspond également à l'hyperquadrique que H fait correspondre à Q. La variété Q' engendre un système linéaire. Lorsque Q tend vers une hyperquadrique Q_0, Q' tend vers une variété $2Q_0'$. Lorsque Q tend vers une hyperquadrique Q_1, Q' tend vers une variété $2Q_1'$ augmentée des variétés formées par les points W_5 infiniment voisins soit de Ψ_1, soit de Ψ_2, variétés aue nous désignerons par le même symbole. On a donc, sur W_5,

$$2Q_0' \equiv 2Q_1' + \Psi_1 + \Psi_2.$$

On en conclut, en observant que les sections hyperplanes de W_5 sont les variétés Q_0', que les variété Q_1' sont les variétés de contact d'hyperquadriques de S_{11} passant par Ψ_1 et Ψ_2.

3. Considérons deux hyperquadriques Q_0. Elles ont en commun une variété V_3 à trois dimensions qui rencontre σ_1 et σ_2 chacun en quatre points. Sur V_3, H détermine une involution I possédant ces huit points comme points unis.

Observons que si P est un point de V_3 situé dans σ_1, l'espace tangent à cette variété en ce point passe par σ_2. Le point de diramation P' correspondant à P est quadruple pour la variété Ω homologue de V_3 sur W_3, le cône tangent en ce point projetant la surface Ψ_2.

Aux hyperquadriques Q_0 passant par V_3 correspondent dans S_{11} les hyperplans passant par un espace S_9 à neuf dimensions, auquel appartient donc la variété Ω.

Désignons par Φ_0 les sections hyperplanes de Ω et par Φ_1 les surfaces suivant lesquelles les hyperquadriques Q'_1 touchent cette variété.

Chacun des huit points unis de l'involution I est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une surface rationnelle. Nous désignerons par Δ la somme de ces surfaces rationnelles et nous avons donc

$$2\Phi_0 \equiv 2\,\Phi_1 + \Delta.$$

A une section hyperplane de la variété W_5 correspond une hyperquadrique Q_0 de S_5. Elle rencontre V_3 suivant une surface F_0 dont les courbes canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro. L'involution I sur la surface F_0 est dépourvue de points unis et son image sur la variété Ω est une surface Φ_0 privée de courbe canonique mais ayant une courbe bicanonique d'ordre zéro ($p_a = p_g = 0$, $P_2 = P_6 = 1$).

A une surface Φ_1 correspond sur V_3 la section de cette variété par une hyperquadrique Q_1. Celle-ci passant par σ_1 et σ_2, l'involution sur la surface F_1 ainsi obtenue possède huit points unis, quatre dans chacun des plans σ_1, σ_2. La surface Φ_1 possède donc des courbes canonique et pluricanoniques d'ordre zéro ($p_a = p_g = P_4 = 1$).

Une surface Φ_1 possède huit points doubles coniques de diramation.

On voit donc que *la section de la variété* W_5, *d'ordre 16, par un un espace à neuf dimensions est une variété à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_2 = P_6 = 1$.

Observons que l'on obtient l'équation des hyperquadriques Q'_1 en élevant au carré les deux membres de l'équation des hyperquadriques Q_1. On trouve ainsi

$$\Sigma \lambda_{ij} \mu_{hk} Y_{il} Z_{jk} = 0.$$

Liège, le 22 septembre 1970.