ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

DÉTERMINATION DES SINGULARITÉS D'UNE SURFACE MULTIPLE EN CERTAINS POINTS DE DIRAMATION

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

Dans un Mémoire récent [1] nous avons exposé une méthode permettant de résoudre le problème suivant : Soit, sur une surface algébrique F, une involution cyclique I_p d'ordre premier p, ne présentant qu'un nombre fini de points unis. Dans le domaine du premier ordre d'un A de ces points unis, la transformation birationnelle de F en soi, génératrice de l'involution, engendre l'identité ou une homographie de période p. Dans le premier cas, nous disons que le point A est uni de première espèce, dans le second qu'il est uni de seconde espèce [2]. Considérons d'autre part une surface normale Φ, image de l'invo-

[1] *Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 1948, p. 189-210). *Voir* aussi notre Note : *Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples* (*Bull. Acad. de Belgique*, 1949, p. 15-30, 262-276, et 277-284), et différentes Notes citées dans le premier Mémoire, en particulier notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Actualités scient.*, nº 270, Paris, Hermann, 1935).

[2] Nous disions souvent, dans nos recherches extérieures, point uni parfait et point uni non parfait. Il nous a paru utile de modifier ces dénominations pour éviter une confusion avec les notations introduites autrefois par Pieri et reprises récemment, avec plus de précision, par M. Severi dans son Ouvrage *Serie, Sistemi d'equivalenze e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche* (Rome, édit. Cremonese, 1942), *voir* p. 278 et suivantes.

lution I_p, telle qu'aux points unis correspondent des points isolés : les points de diramation. Si A est uni de première espèce, le point de diramation A' qui lui correspond est multiple d'ordre p pour la surface Φ. Si au contraire A est uni de seconde espèce, la détermination de la singularité de Φ au point A' est beaucoup plus compliquée. Le point A est alors, sur la surface F, l'origine d'une sorte d'arbre de points unis, infiniment voisins de A. La méthode que nous avons exposée dans le Mémoire cité a pour but de déterminer cet arbre et la singularité de Φ au point A'.

Dans cette Note, nous nous proposons d'appliquer cette méthode à la détermination des singularités de points de diramation dans trois cas particuliers. Dans chaque cas, le point de diramation est un point triple triplanaire pour la surface Φ, mais ces points présentent, dans le domaine du premier ordre, des singularités très différentes. Il nous a paru intéressant de montrer la genèse de ces singularités. Notre Note débute par un bref résumé de la méthode.

1. Soient F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier impair p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, T la transformation birationnelle de F en soi génératrice de cette involution. Nous pouvons prendre, pour modèle projectif de F, une surface normale, d'ordre pn, appartenant à un espace linéaire S_r dont la dimension est arbitrairement grande, sur laquelle T est déterminée par une homographie ayant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$, dont le premier seul rencontre F (aux points unis de l'involution). Le système $|C|$ des sections hyperplanes de F contient p systèmes linéaires partiels $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{p-1}|$ appartenant à l'involution, le système $|C_i|$ étant découpé par les hyperplans passant par les axes ponctuels de l'homographie, sauf par σ_i.

Le système $|C_0|$ est dépourvu de points-base et sa dimension r_0 peut être supposée aussi grande qu'on le veut. En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions, on obtient, comme transformée de F, une surface Φ, d'ordre n, image de l'involution I_p. Nous désignerons par Γ_0 les sections hyperplanes de Φ; courbes qui correspondent aux courbes C_0. Si π est le genre des courbes Γ_0, les courbes C_0 et par suite les courbes C sont de genre $p(\pi - 1) + 1$.

Aux axes $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ de l'homographie T, nous avons attaché les nombres $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-1}$, où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Soient A un point uni de seconde espèce de l'involution; il appartient à l'axe σ_0 et nous supposons que le plan tangent à F en A n'a que ce point en commun avec σ_0. Ce plan tangent s'appuie en un point sur deux des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-i}$. On peut toujours supposer, sauf à modifier éventuellement les notations, que l'un de ces espaces est σ_1 et nous désignerons l'autre par σ_α. Soient a_1, a_α les tangentes à F en A s'appuyant la première sur σ_1, la seconde sur σ_α.

Nous désignerons par C'_0 les courbes C_0 passant par A ; elles ont en ce point la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$, λ_1 tangentes à ces courbes en ce point étant confondues avec a_1 et μ_1 avec a_α. Nous désignerons par $|C''_0|$ le système formé par les courbes C'_0 assujetties à toucher en A une droite distincte de a_1, a_α. Ces courbes ont en A la multiplicité $\lambda_2 + \mu_2$, λ_2 de leurs tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et μ_2 avec a_α. Et ainsi de suite.

Si nous posons $p = 2\nu + 1$, nous obtenons ainsi $\nu + 1$ systèmes linéaires

$$|C'_0| \quad |C''_0|, \quad \ldots, \quad |C_0^{(\nu)}|, \quad |C_0^{(\nu+1)}|,$$

dont le dernier est formé de courbes ayant en A la multiplicité p, les tangentes en A étant variables. Nous désignerons par $\lambda_i + \mu_i$ la multiplicité du point A pour les courbes $C_0^{(i)}$, λ_i des tangentes en ce point à ces courbes étant confondues avec a_1 et μ_i avec a_α.

Nous avons

$$\lambda_1 + \mu_1 < \lambda_2 + \mu_2 < \ldots < \lambda_\nu + \mu_\nu < p.$$

De plus, les nombres λ_i, μ_i satisfont à la congruence

$$(1) \qquad \lambda + \alpha\mu \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, p).$$

Si β est un entier inférieur à p tel que

$$\alpha\beta - 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, p),$$

nous avons également

$$(2) \qquad \mu + \beta\lambda \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, p).$$

Les courbes C_1 passent simplement par A en y touchant a_α ; elles rencontrent chacune des courbes C'_0, C''_0, ..., $C_0^{(\nu)}$ en p points confondus en A.

Parmi les solutions de la congruence (1), se trouve la solution $\lambda = p - \alpha$, $\mu = 1$. Soient $C_0^{(i)}$ les courbes qui correspondent à cette solution. Si chacune des courbes $C_0^{(i)}$, le point A est l'origine d'une branche linéaire tangente en A à a_α. Cette branche doit avoir p points communs avec les courbes C_1 confondus en A, par conséquent les courbes $C_0^{(i)}$, C_1 ont en commun une suite de $\alpha - 1$ points fixes en commun, infiniment voisins successifs de A : nous les désignerons par $A_{\alpha,1}$, $A_{\alpha,2}$, ..., $A_{\alpha,\alpha-1}$. Ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution, sauf le dernier qui est uni de première espèce.

De même, en utilisant la solution $\lambda = 1$, $\mu = p - \beta$ de la congruence (2), on voit que les courbes correspondantes ont en commun, avec les courbes C_α, une suite de $\beta - 1$ points fixes infiniment voisins successifs de A, unis de seconde espèce pour l'involution, sauf le dernier qui est uni de première espèce.

2. Nous désignerons par $\Gamma_0^{(i)}$ les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes $C_0^{(i)}$. Les systèmes $|C_0^{(i)}|$, $|\Gamma_0^{(i)}|$ ont la dimension $r_0 - i$. En rapportant projectivement les courbes $C_0^{(i)}$ aux hyperplans d'un espace linéaire à $r_0 - i$ dimensions, il correspond à la surface F une surface Φ_i, image de l'involution,

dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(i)}$. Nous obtenons ainsi une suite de surfaces

$$(3) \qquad \Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots, \quad \Phi_\nu, \quad \Phi_{\nu+1},$$

à condition de supposer $r_0 \geqq \nu + 4$.

Soit A' le point de diramation qui correspond sur Φ au point uni A. Sur Φ, les courbes Γ'_0 sont découpées par les hyperplans passant par le point A'. La surface Φ_1 est donc la projection, à partir de A', de la surface Φ sur un hyperplan de l'espace ambiant (ou est tout au moins projectivement identique à cette projection). Plus généralement, sur la surface Φ_i, les courbes $\Gamma_0^{(i+1)}$ sont découpées par les hyperplans passant par un point A'_i et la surface Φ_{i+1} est projectivement identique à la projection de la surface Φ_i, à partir de A'_i, sur un hyperplan de l'espace ambiant.

L'utilisation de la suite de surfaces (3) permet d'analyser la singularité de la surface Φ au point A', comme on le verra dans les exemples suivants.

I

3. Supposons en premier lieu $p = 17$, $\alpha = 14$ et par suite $\beta = 11$. Nous avons

$$\lambda_1 = 3, \quad \mu_1 = 1; \quad \lambda_2 = 1, \quad \mu_2 = 6; \quad \lambda_3 = 6, \quad \mu_3 = 2; \quad \lambda_4 = 4, \quad \mu_4 = 7;$$
$$\lambda_5 = 9, \quad \mu_5 = 3; \quad \lambda_6 = 2, \quad \mu_6 = 12; \quad \lambda_7 = 7, \quad \mu_7 = 8; \quad \lambda_8 = 12, \quad \mu_8 = 4.$$

Nous avons actuellement deux suites de points unis infiniment voisins successifs de A : L'une, $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, ..., $A_{1,10}$, dont le premier point se trouve sur la tangente a_1; l'autre, $A_{\alpha,1}$, $A_{\alpha,2}$, ..., $A_{\alpha,13}$, dont le premier point se trouve sur a_α.

Les courbes C'_0 ont un point quadruple en A; elles passent trois fois par $A_{1,1}$, deux fois par $A_{1,2}$, une fois par $A_{1,3}$, ..., $A_{1,10}$ et une fois par un point $A_{1,2,1}$, infiniment voisin de $A_{1,2}$, uni de première espèce pour l'involution. Les courbes C'_0 passent une fois par les points $A_{\alpha,1}$, $A_{\alpha,2}$, ..., $A_{\alpha,13}$.

Sur la surface Φ_1, il correspond aux domaines des points $A_{1,10}$, $A_{1,2,1}$, $A_{\alpha,13}$, trois droites σ_1, τ, σ_α. Cette surface est d'ordre $n - 3$ et ses sections hyperplanes Γ'_0 sont de genre $\pi - 2$. Le point de diramation A' est par conséquent triple triplanaire pour la surface Φ.

4. Les courbes C''_0 ont la multiplicité 7 en A, une des tangentes à ces courbes en ce point étant confondue avec a_1 et les six autres avec a_α. Ces courbes passent nécessairement une fois par les points $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, ..., $A_{1,10}$; elles ne passent plus par $A_{1,2,1}$. Sur la surface Φ_1, les courbes Γ''_0 sont donc découpées par des hyperplans passant par un point A'_1 appartenant à la droite τ.

Les courbes C_1 ne pouvant rencontrer les courbes C''_0 en plus de 17 points confondus en A, ces dernières courbes ne passent plus par $A_{\alpha,13}$ et par suite le point A'_1 appartient également à la droite σ_α.

Le point $A_{\nu,1}$ peut être sextuple pour les courbes C''_0; dans ce cas, le point $A_{\alpha,2}$ est quadruple pour ces courbes et celles-ci passent encore deux fois par deux points $A_{\alpha,2,1}$, $A_{\alpha,2,1,1}$ infiniment voisins successifs de $A_{\nu,2}$, Le point $A_{\alpha,2,1,1}$ est uni de première espèce pour l'involution.

Sur la surface Φ_2, projection de Φ_1 à partir de A''_1, il correspond au domaine du point $A_{\alpha,2,1,1}$ une conique ρ_0 et A'_1 est double conique pour Φ_1. A la droite σ_1 correspond sur Φ_2 une droite σ_1 et aux droites σ_α, τ des points singuliers pour la surface, appartenant à ρ_0.

Puisque A'_1 est double conique pour Φ_1, le système $|\Gamma''_0|$ a le degré $n-5$ et par conséquent, $|C''_0|$ doit avoir le degré effectif $17(n-5)$. Or, dans l'intersection de deux courbes C''_0, le point A absorbe 7×17 points, alors qu'il ne doit en absorber que 5×17. Nous sommes donc conduit à une contradiction et par conséquent, les courbes C''_0 n'ont pas, en A, le comportement qui vient d'être indiqué.

5. Avant d'étudier le comportement des courbes C''_0, nous étudierons celui des courbes C'''_0.

Ces courbes ont la multiplicité 8 en A, six de leurs tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et deux avec a_α. Elles ne peuvent passer par les points $A_{1,10}$, $A_{\alpha,13}$, car alors elles seraient rencontrées en plus de 17 points confondus en A par les courbes C_α, C_1.

Sur la surface Φ_1, les courbes Γ'''_0 sont découpées par les hyperplans passant par une droite s'appuyant sur les droites σ_1, σ_α. Ces courbes étant des courbes Γ'''_0 particulières, leurs hyperplans passent par le point A'_1, commun aux droites σ_1, τ.

Observons maintenant que les courbes C'''_0 passent nécessairement deux fois par les points $A_{\alpha,1}$, $A_{\alpha,2}$, $A_{\alpha,3}$, $A_{\alpha,4}$, une fois par le point $A_{\alpha,5}$ et une fois par un point $A_{\alpha,5,1}$, uni de première espèce pour l'involution, infiniment voisin du point $A_{\alpha,5}$.

Cela étant, supposons que les courbes C'''_0 ne passent pas par le point $A_{1,2,1}$ (qui correspond à la droite τ). Alors ces courbes passent nécessairement quatre fois par $A_{1,1}$, deux fois par $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, une fois par $A_{1,4}$ et par un point $A_{1,4,1}$, infiniment voisin du précédent ; enfin, deux fois par un point $A_{1,1,1}$, infiniment voisin de $A_{1,1}$. Dans ces conditions, le point A équivaut à 112 points dans l'intersection de deux courbes C'''_0. Mais ce nombre doit être multiple de 17, car $|C'''_0|$ appartient à l'involution. Nous sommes donc conduit à une absurdité, donc les courbes C'''_0 passent par $A_{1,2,1}$, c'est-à-dire que sur Φ_1, les hyperplans des courbes Γ'''_0 passent par la droite τ. On en conclut aussi que les droites σ_1 et τ se rencontrent.

Sur la surface Φ_2, les courbes Γ'''_0 sont découpées par les hyperplans passant par un point A'_2 qui appartient à la droite σ_1 et coïncide avec le point singulier τ (qui représente la droite τ sur cette surface).

Les courbes C'''_0 passent nécessairement six fois par le point $A_{1,1}$ et trois fois par chacun des points $A_{1,2}$, $A_{1,2,1}$.

Sur la surface Φ_3, il correspond à τ une cubique gauche que nous désignerons toujours par τ. Au domaine du point $A_{\alpha,5,1}$ correspond une droite ρ_2. A la droite σ_2 correspond un point singulier appartenant à la cubique gauche τ et à σ_α correspond également un point singulier dont la position sera fixée plus tard.

La surface Φ_3 est d'ordre $n-8$ et ses sections hyperplanes Γ'''_0 ont le genre $\pi-5$.

6. Retournons aux courbes C''_0. Comme on l'a vu, aux courbes C'''_0 correspondent sur Φ_2 les courbes Γ''_0 découpées par les hyperplans passant par un point A'_2 appartenant à σ_1 et coïncidant avec le point singulier τ. Φ_3 est la projection de Φ_2 à partir de ce point A'_2.

La droite ρ_2 de Φ_3 peut provenir soit d'une droite infiniment petite du domaine du point A'_2, soit d'une droite proprement dite ρ_2 tracée sur Φ_2.

Dans la première hypothèse, le point A'_2 serait quadruple pour Φ_2 et cette surface serait d'ordre $n-4$, puisque Φ_3 est d'ordre $n-8$. Sur les courbes C''_0, le point A devrait être l'origine d'une seule branche contenant, comme dernier point fixe commun à toutes ces courbes, un point uni de première espèce simple pour les courbes en question. On a vu que cela était impossible, le dernier point $A_{\alpha,2,1,1}$ étant double pour les courbes C'''_0. Il existe donc sur Φ_2 une droite ρ_2 proprement dite et le point A'_2 est triple pour la surface.

Les courbes C''_0 passent une fois par le point $A_{\alpha,5,1}$ dont le domaine correspond à la droite ρ_2. Il en résulte que les courbes C''_0 passent nécessairement trois fois par $A_{\alpha,1}$, deux fois par $A_{\alpha,2}$, $A_{\alpha,3}$, $A_{\alpha,4}$, une fois par $A_{\alpha,5}$ et par $A_{\alpha,5,1}$, enfin une fois par trois points $A_{\alpha,1,1}$, $A_{\alpha,1,2}$, $A_{\alpha,1,3}$ infiniment voisins successifs de $A_{\alpha,1}$, le dernier étant uni de première espèce pour l'involution.

Au domaine du point $A_{\alpha,1,3}$ correspond sur Φ_2 une droite ρ_1 et le point A'_1 est donc double biplanaire pour Φ_1. Comme A'_1 est le point d'intersection de τ et σ_1 sur Φ_1 et que la droite ρ_2 ne rencontre pas τ, il faut que la droite ρ_1 rencontre τ et la droite ρ_2, la droite σ_α. En d'autres termes, sur la surface Φ_2, nous avons trois droites σ_1, ρ_1, ρ_2 et deux points singuliers τ et σ_α. Les droites ρ_1, ρ_2 se rencontrent; le point singulier τ appartient aux droites σ_1, ρ_1 et le point singulier σ_α à la droite ρ_2.

7. De ce qui précède résulte que le point de diramation A' de Φ est équivalent à cinq courbes rationnelles

$$\sigma_1, \quad \tau, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \sigma_\alpha,$$

chacune rencontrant la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontrant pas les autres. On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \sigma_1 + \tau + \rho_1 + \rho_2 + \sigma_\alpha$$

et les degrés virtuels des courbes σ_1, τ, ρ_1, ρ_2, σ_α sont par suite respectivement égaux à -2, -3, -2, -2, -2.

On a ensuite

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma''_0 + \sigma_1 + \tau + 2(\rho_1 + \rho_2) + \sigma_\alpha,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'''_0 + \sigma_1 + 2(\tau + \rho_1 + \rho_2) + \sigma_\alpha.$$

On vérifie, en utilisant ces relations fonctionnelles, que les nombres des points d'intersection des courbes Γ''_0, Γ'''_0 avec σ_1, τ, ρ_1, ρ_2, σ_α sont bien ceux qui ont été rencontrés plus haut.

Le point de diramation A′ *de la surface* Φ *est triple triplanaire pour cette surface. L'un des plans tangents* (τ) *à* Φ *en* A′ *rencontre chacun des deux autres plans tangents* (σ_1), (σ_α) *suivant une droite, mais ces deux derniers plans ne se rencontrent pas en dehors de* A′. *Au point* A′ *est infiniment voisin, sur la droite commune aux plans* (τ), (σ_α), *un point double biplanaire.*

II

8. Nous supposerons en second lieu $p = 23$, $\alpha = 19$, d'où $\beta = 17$. On a

$\lambda_1 = 4$, $\mu_1 = 1$; $\lambda_2 = 1$, $\mu_2 = 6$; $\lambda_3 = 8$, $\mu_3 = 2$; $\lambda_4 = 5$, $\mu_4 = 7$;
$\lambda_5 = 2$, $\mu_5 = 12$; $\lambda_6 = 12$, $\mu_6 = 3$; $\lambda_7 = 9$, $\mu_7 = 8$; $\lambda_8 = 6$, $\mu_8 = 13$;
$\lambda_9 = 16$, $\mu_9 = 4$; $\lambda_{10} = 3$, $\mu_{10} = 18$; $\lambda_{11} = 13$, $\mu_{11} = 9$.

Les courbes C'_0 ont en A la multiplicité 5, quatre tangentes étant confondues avec a_1 et une avec a_α. Ces courbes passent simplement par une suite de 18 points fixes $A_{\alpha,1}$, $A_{\alpha,2}$, ..., $A_{\alpha,18}$, infiniment voisins successifs de A, unis pour l'involution, le dernier étant uni de première espèce.

Les courbes C'_0 passent par une suite de 16 points fixes $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, ..., $A_{1,16}$, infiniment voisins successifs de A, unis pour l'involution, le dernier étant uni de première espèce. Elles passent précisément trois fois par le point $A_{1,1}$, une fois par les autres. Elles passent en outre une fois par deux points fixes $A_{1,1,1}$, infiniment voisin de $A_{1,1}$ et $A_{1,1,1,1}$, infiniment voisin de $A_{1,1,1}$. Ces points sont unis pour l'involution et le dernier est de première espèce.

Sur la surface Φ_1, il correspond aux domaines des points $A_{1,16}$, $A_{1,1,1,1}$, $A_{\alpha,18}$, des droites σ_1, τ, σ_α. Le point A′ est donc triple triplanaire pour la surface Φ. La surface Φ_1 est d'ordre $n-3$ et ses sections hyperplanes Γ'_0 sont de genre $\pi - 2$.

9. Les courbes C''_0 passent sept fois par A, une de leurs tangentes en ce point est confondue avec a_1. Ces courbes passent simplement par les seize points $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, ..., $A_{1,16}$. Par conséquent, les courbes Γ''_0 qui leur correspondent sont découpées sur la surface Φ_1 par les hyperplans passant par un point A'_1 appartenant à la droite τ.

Les courbes C''_0 ne peuvent plus passer par le point $A_{\alpha,18}$, car autrement elles seraient rencontrées par les courbes C_1 en plus de 23 points confondus en A. Par conséquent, les hyperplans des courbes Γ''_0 sur Φ_1 passent par un point appartenant à σ_α. Le point A'_1 appartient donc aux droites τ, σ_α.

Les courbes C''_0 peuvent passer six fois sur les points $A_{\alpha,1}$, $A_{\alpha,2}$, quatre fois par le point $A_{\alpha,3}$ et deux fois par un point $A_{\alpha,3,1}$ infiniment voisin de $A_{\alpha,3}$ et par un point $A_{\alpha,3,1,1}$ infiniment voisin du précédent. Le point A'_1 serait alors double conique pour la surface Φ_1 et la surface Φ_2 serait d'ordre $n-5$. Or, dans l'intersection de deux courbes C''_0, le point A absorbe 7×23 unités, de sorte que la surface Φ_2 devrait être $n-7$. L'absurdité à laquelle nous parvenons prouve que les courbes C'_0 ne peuvent avoir en A le comportement qui vient d'être considéré.

10. Comme dans le cas précédent, nous étudierons d'abord le comportement des courbes C'''_0 au point A.

Les courbes C'''_0 ont en A la multiplicité 10, huit tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et deux avec a_α. Ces courbes passent nécessairement deux fois par les six points $A_{\alpha,1}$, $A_{\alpha,2}$, ..., $A_{\alpha,6}$, une fois par $A_{\alpha,7}$ et une fois par un point $A_{\alpha,3,1}$ infiniment voisin du précédent. Le point $A_{\alpha,7,1}$ est uni de première espèce pour l'involution. Au domaine de ce point correspond, sur la surface Φ_3, dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ'''_0, une droite ρ_2.

Les courbes C'''_0 ne peuvent passer par $A_{1,16}$, car autrement elles seraient rencontrées sur plus de 23 points confondus en A par les courbes C_α. Il en résulte que sur la surface Φ_1, les courbes Γ'''_0 sont découpées par des hyperplans passant par une droite s'appuyant sur σ_1 et passant par le point A'_1 (car les courbes Γ'''_0 sont des courbes Γ''_0 particulières).

Supposons en premier lieu que les courbes C'''_0 ne passent pas par $A_{1,1,1,1}$. Alors, ces courbes passent huit fois par $A_{1,1}$, cinq fois par $A_{1,2}$, trois fois par un point $A_{1,\alpha,1}$ infiniment voisin de $A_{1,2}$, deux fois par un point $A_{1,2,1,1}$ infiniment voisin du précédent, enfin une fois par un point $A_{1,2,1,1,1}$ infiniment voisin de $A_{1,2,1,1}$. Le point A absorbe 103 points dans l'intersection de deux courbes C'''_0. Ces courbes forment un système linéaire appartenant à l'involution, ce nombre devrait être multiple de 23. Il en résulte que les nombres C'''_0 passent par $A_{1,1,1,1}$, c'est-à-dire que les hyperplans découpant sur Φ_1 les courbes Γ'''_0 passent par la droite τ. Celle-ci doit donc s'appuyer sur σ_1 en un point que nous désignerons par A'''_1.

Les courbes Γ_0''' rencontrent τ en trois points variables au plus, c'est-à-dire que $A_{1,1,1,1}$ est au plus triple pour les courbes C_0''.

Si $A_{1,1,1,1}$ est triple pour les courbes C_0''', il en est de même de $A_{1,1,1}$ et le point $A_{1,1}$ est multiple d'ordre 6 pour ces courbes. Cela est impossible, car la somme des multiplicités des points $A_{1,1}$, $A_{1,1,1}$ pour les courbes C_0''' est en plus égale à 8, nombre des tangentes en A à ces courbes confondues avec a_1.

Si $A_{1,1,1,1}$ est double pour les courbes C_0''', $A_{1,1,1}$ est également double pour ces courbes. Le point $A_{1,1}$ est sextuple pour les courbes C_0''' et celles-ci passent deux fois par $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, $A_{1,4}$, une fois par $A_{1,5}$ et une fois par un point $A_{1,5,1}$, uni de première espèce pour l'involution. Au domaine de ce point correspond sur Φ_3 une droite τ_1. Φ_3 est d'ordre $n-8$.

Si $A_{1,1,1,1}$ est simple pour les courbes C_0''', $A_{1,1,1}$ est également simple et $A_{1,1}$ est multiple d'ordre 7; $A_{1,2}$ est multiple d'ordre 5, $A_{1,3}$ est simple et les courbes C_0''' passent encore simplement par quatre points $A_{1,3,1}$, $A_{1,3,2}$, $A_{1,3,3}$, $A_{1,3,4}$ infiniment voisins successifs de $A_{1,3}$. Au domaine de ce dernier point correspond encore sur Φ_3 une droite τ_1. Φ_3 est d'ordre $n-9$.

Observons que sur la surface Φ_2, à la droite σ_1 de Φ_1 correspond une droite σ_1, à τ correspond un point singulier situé sur σ_1. Les courbes Γ_0''' sont découpées sur Φ_2 par les hyperplans passant par un point A_2' qui coïncide avec τ. D'une manière précise, le domaine de A_2' sur Φ_2 est équivalent à l'ensemble des courbes τ_1, τ et éventuellement ρ_2.

Si la droite ρ_2 de Φ_3 provenait d'une droite infiniment petite, infiniment voisine de A_2', les courbes C_0'' ne passeraient pas par $A_{\alpha,7,1}$ et sur ces courbes, le point A serait l'origine d'une seule branche tangente à a_α. On a vu que dans ce cas, A_1' est double conique pour Φ_1 et que l'on est conduit à une contradiction. Donc ρ_2 provient d'une droite ρ_2 tracée sur Φ_2. Dans ces conditions, A_2' est au plus triple pour Φ_2 et d'autre part, A_1' est au plus double pour Φ_1; l'ordre de la surface Φ_3 est au moins égal à $n-8$. On en conclut que c'est la première hypothèse envisagée plus haut qui est valable, c'est-à-dire que le point $A_{1,1,1,1}$ est double pour les courbes C_0'''.

Sur la surface Φ_2, τ est une conique et τ_1 une droite. A σ_1 correspond un point singulier appartenant à τ ou τ_1. On verra plus loin qu'il appartient à τ_1.

11. Sur Φ_2, ρ_2 est une droite, donc les courbes C_0'' passent simplement par le point $A_{\alpha,7,1}$. Il en résulte que ces courbes passent simplement par $A_{\alpha,7}$ et au moins deux fois par $A_{\alpha,6}$, $A_{\alpha,5}$, ..., $A_{\alpha,1}$. Il est aisé de voir qu'elles doivent précisément passer cinq fois par $A_{\alpha,1}$ et deux fois par $A_{\alpha,2}$, $A_{\alpha,3}$, ..., $A_{\alpha,6}$. De plus, elles passent une fois par un point $A_{\alpha,1,1}$ infiniment voisin de $A_{\alpha,1}$ et par deux points $A_{\alpha,1,1,1}$, $A_{\alpha,1,1,2}$ infiniment voisins successifs du précédent. Au domaine du point $A_{\alpha,1,1,2}$ correspond sur Φ_2 une droite ρ_1 et le point A_1' est double biplanaire pour Φ_1.

Des deux droites ρ_1, ρ_2, l'une, par exemple ρ_1, rencontre τ et l'autre ρ_2

rencontre σ_α. Sur la surface Φ_2, σ_α est un point singulier appartenant à la droite ρ_2 et τ un point singulier appartenant à la droite ρ_1. Il en résulte que c'est τ_1 qui rencontre σ_1.

12. Le point de diramation A' de Φ est équivalent à l'ensemble de six courbes rationnelles

$$\sigma_1, \quad \tau_1, \quad \tau, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \sigma_\alpha,$$

dont chacune rencontre la suivante et la précédente en un point, mais ne rencontre pas les autres.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \sigma_1 + \tau_1 + \tau + \rho_1 + \rho_2 + \sigma_\alpha$$

et l'on en conclut que les courbes σ_1, τ_1, ..., σ_α ont respectivement pour degré virtuel -2, -2, -3, -2, -2, -2.

Les courbes Γ''_0, Γ'''_0 satisfont aux relations fonctionnelles

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma''_0 + \sigma_1 + \tau_1 + \tau + 2(\rho_1 + \rho_2) + \sigma_\alpha,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'''_0 + \sigma_1 + 2(\tau_1 + \tau + \rho_1 + \rho_2) + \sigma_\alpha.$$

Le domaine du point A''_1 intersection des droites σ_1, τ sur Φ_1, est équivalent à la droite τ_1. Ce point est double conique pour Φ_1, car lorsque l'on passe de Φ_1 à Φ_2 par projection à partir de A'_1, à la conique infiniment petite du domaine de A''_1 sur Φ_1, correspond une droite infiniment petite infiniment voisine de A'_2.

Le point de diramation A' de la surface Φ est triple triplanaire pour cette surface; le cône tangent en ce point se compose de trois plans (σ_1), (τ), (σ_α), le second rencontrant les deux autres chacun suivant une droite, mais (σ_1), (σ_α) ne se rencontrant pas en dehors de A'. Au point A' sont infiniment voisins un point double biplanaire sur la droite commune à (τ_1), (σ_α) et un point double conique situé sur la droite commune à (τ), (σ_1).

III.

13. Supposons maintenant que nous ayons $p = 23$, $\alpha = 20$, d'où $\beta = 15$. Nous avons

$\lambda_1 = 3$, $\mu_1 = 1$; $\lambda_2 = 6$, $\mu_2 = 2$; $\lambda_3 = 1$, $\mu_3 = 8$, $\lambda_4 = 9$; $\mu_4 = 3$;
$\lambda_5 = 4$, $\mu_5 = 9$; $\lambda_6 = 12$, $\mu_6 = 4$; $\lambda_7 = 7$, $\mu_7 = 10$; $\lambda_8 = 3$, $\mu_8 = 16$;
$\lambda_9 = 15$, $\mu_9 = 5$; $\mu_{10} = 10$, $\mu_{10} = 11$; $\lambda_{11} = 5$, $\mu_{11} = 17$.

Les courbes C'_0 ont en A la multiplicité 4, trois tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et une avec a_α. Elles ont en commun une suite de 19 points $A_{\alpha,1}$, $A_{\alpha,2}$, ..., $A_{\alpha,19}$, infiniment voisins susccessifs de A, simples pour les courbes et une suite de 14 points $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, ..., $A_{1,14}$ infiniment voisins successifs de A. Le point $A_{\alpha,1}$ appartient à a_α et le point $A_{1,1}$ à a_1.

Les points $A_{1,1}$, $A_{1,2}$ sont triples pour les courbes C'_0, le point $A_{1,3}$ est double et les points $A_{1,4}$, ..., $A_{1,14}$ sont simples. Les courbes C'_0 ont en outre en commun un point simple $A_{1,3,1}$ infiniment voisin de $A_{1,3}$.

Les points $A_{1,14}$, $A_{1,3,1}$ et $A_{\alpha,19}$ sont unis de première espèce pour l'involution et il leur correspond, sur la surface Φ_1, trois droites σ_1, τ, σ_α. Le point de diramation A' est donc triple triplanaire pour la surface Φ.

Les sections hyperplanes Γ'_0 de Φ, sont de genre $\pi - 2$ et la surface est d'ordre $n - 3$.

14. Les courbes C''_0 ont la multiplicité 8 en A, six tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et les deux autres avec a_α. Ces courbes passent nécessairement deux fois par $A_{1,1}$ et une fois par $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, ..., $A_{1,14}$; elles ne passent plus par $A_{1,3,1}$. Ces courbes ne peuvent plus passer par $A_{\alpha,19}$; elles passent précisément deux fois par sept points $A_{\alpha,1}$, $A_{\alpha,2}$, ..., $A_{\alpha,7}$, une fois par $A_{\alpha,8}$.

Les courbes C''_0 doivent passer par quatre points $A_{1,1,1}$, $A_{1,1,2}$, $A_{1,1,3}$, $A_{1,1,4}$ infiniment voisins successifs de $A_{1,1}$ et une fois par un point $A_{\alpha,8,1}$ infiniment voisin de $A_{\alpha,8}$.

Sur la surface Φ_1, les courbes Γ''_0 sont découpées par les hyperplans passant par un point A'_1 appartenant aux droites τ et σ_α.

Les points $A_{1,1,4}$ et $A_{\alpha,8,1}$ sont unis de première espèce pour l'involution et il correspond à leurs domaines, sur la surface Φ_2, deux droites ρ_{11}, ρ_{21}. Il en résulte que A'_1 est double biplanaire pour la surface Φ_1, les plans tangents à cette surface en ce point étant obtenus en projetant les droites ρ_{11}, ρ_{21} de A'_1.

A la droite τ correspond sur Φ_2 un point singulier appartenant à la droite ρ_{11} et à σ_α, un point singulier appartenant à la droite ρ_{21}. A σ_1 correspond une droite σ_1.

La surface Φ_2 est d'ordre $n - 5$ et ses sections hyperplanes Γ''_0 sont de genre $\pi - 3$.

15. Les courbes C'''_0 ont en A la multiplicité 9, une de leurs tangentes en ce point étant confondue avec a_1 et 8 avec a_α. Elles passent simplement par les points $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, ..., $A_{1,14}$. Sur Φ_2, il leur correspond des courbes Γ'''_0 découpées par les hyperplans passant par un point A'_2 appartenant à ρ_{11}, distinct du point singulier τ.

Si le point A est, sur une courbe C'''_0, l'origine d'une seule branche tangente à a_α, ces courbes passant huit fois par $A_{\alpha,1}$, six fois par $A_{\alpha,2}$, deux fois par trois points $A_{\alpha,2,1}$, $A_{\alpha,2,1,1}$, $A_{\alpha,2,1,2}$ infiniment voisins successifs de $A_{\alpha,2}$. Mais dans ces conditions, le point A absorbe 9×23 points dans l'intersection de deux courbes C'''_0 et la surface Φ_3 est donc d'ordre $n - 9$. D'autre part, les courbes C_0''' ne passant pas par $A_{\alpha,8,1}$, il correspond à ces courbes sur Φ_2 les sections par les hyperplans passant par un point A_2' appartenant à ρ_{21}. On a vu que A_2' appartient également à ρ_{11}. Ce point A_2' devrait être multiple d'ordre 4 pour Φ_2, ce qui est absurde, car il donnerait sur Φ_1 un point quadruple infiniment voisin d'un point double.

On en conclut que sur une courbe C_0''', le point A est l'origine de deux branches tangentes en ce point à a_α. L'examen des cas possibles, en tenant compte que les courbes C_0''' coupent les courbes C_1 en 23 points confondus en A et que $|C_0'''|$ appartient à l'involution, conduit à une seule solution acceptable.

Les courbes C_0''' passent six fois par $A_{\alpha,1}$, trois fois par $A_{\alpha,2}$, $A_{\alpha,3}$, deux fois par $A_{\alpha,4}$ et en outre deux fois par un point $A_{\alpha,1,1}$ infiniment voisin de $A_{\alpha,1}$, une fois par deux points $A_{\alpha,1,2}$, $A_{\alpha,1,2,1}$ infiniment voisins successifs de $A_{\alpha,1,1}$, enfin une fois par deux points $A_{\alpha,4,1}$, $A_{\alpha,4,1,1}$ infiniment voisins successifs de $A_{\alpha,4}$.

Les points $A_{\alpha,1,2,1}$ et $A_{\alpha,4,1,1}$ sont unis de première espèce pour l'involution et il leur correspond, sur Φ_3, deux droites ρ_{12}, ρ_{22}. Le point A_2' est donc double biplanaire pour Φ_2. La surface Φ_3 est d'ordre $n-7$ et ses sections hyperplanes Γ_0''' sont de genre $\pi-4$.

Sur la surface Φ_3 existent deux points singuliers : l'un appartenant à la droite ρ_{12} représente les courbes τ et ρ_{11}, l'autre appartenant à la droite ρ_{22} représente les courbes σ_α, ρ_{21}. A σ_1 correspond une droite σ_1.

16. Les courbes $C_0^{(4)}$ ont en A la multiplicité 12, neuf tangentes étant confondues avec a_1 et trois avec a_α. Ces courbes ne peuvent plus passer par $A_{1,14}$.

Si les courbes $C_0^{(4)}$ passaient deux fois par $A_{\alpha,4}$, le point $A_{\alpha,1,1}$ leur appartiendrait et serait uni de première espèce pour l'involution. Or, les courbes C_0''' passent par ce point et par $A_{\alpha,1,2}$ et par conséquent $A_{\alpha,1,1}$ ne peut être qu'un point uni de seconde espèce. Les courbes $C_0^{(4)}$ passent donc trois fois par $A_{\alpha,1}$. Elles passent nécessairement trois fois par $A_{\alpha,2}$, $A_{\alpha,3}$, deux fois par $A_{\alpha,4}$ et une fois par $A_{\alpha,4,1}$, $A_{\alpha,4,1,1}$. Il en résulte que les courbes $\Gamma_0^{(4)}$, sur Φ_3, rencontrent ρ_{22} en un point variable, mais ρ_{12} en un point fixe. Ces courbes sont découpées sur cette surface par les hyperplans passant par un point A_3' appartenant aux droites ρ_{12} et σ_1.

Si les courbes $C_0^{(4)}$ passaient neuf fois par $A_{1,1}$, elles passeraient deux fois par $A_{1,2}$, deux fois par trois points et une fois par deux points infiniment voisins successifs de $A_{1,2}$. Le point A_3' serait simple pour Φ_3. Par contre, le degré de $|\Gamma_0^{(4)}|$ serait égal à $n-12$ et devrait être quintuple pour Φ_3. Donc les courbes $C_0^{(4)}$ ne peuvent passer neuf fois par $A_{1,1}$.

Si les courbes $C_0^{(4)}$ passaient plus de cinq fois par $A_{1,1}$, l'un des points $A_{1,1,1}$, $A_{1,1,2}$, $A_{1,1,3}$ serait uni de première espèce pour l'involution, alors que ces points, qui appartiennent aux courbes C_0'', sont unis de seconde espèce. On vérifie aisément que si elles passaient moins de cinq fois par $A_{1,1}$, le degré effectif de $|C_0^{(4)}|$ ne pourrait être multiple de 23. On en conclut que les courbes $C_0^{(4)}$ passent cinq fois par $A_{1,1}$, quatre fois par $A_{1,2}$, deux fois $A_{1,3}$, une fois par chacun des points $A_{1,1,1}$, $A_{1,1,2}$, $A_{1,1,3}$, $A_{1,1,4}$ et enfin deux fois par $A_{1,3,1}$. Par conséquent, le point A'_3 coïncide avec le point singulier de ρ_{12} qui représente les courbes τ, ρ_{11}.

Sur la surface Φ_4, la courbe τ est une conique, la courbe ρ_{11} une droite, σ_1 est un point singulier appartenant à la conique τ, ρ_{12} un point singulier appartenant à la droite ρ_{11}, ρ_{22} est une droite passant par ce point singulier et contenant un point singulier représentant les courbes ρ_{21} et σ_α.

La surface Φ_4 est d'ordre $n-10$ et ses sections hyperplanes $\Gamma_0^{(4)}$ sont de genre $\pi-6$.

17. Le point de diramation A' de Φ est équivalent à un ensemble de sept courbes rationnelles

$$\sigma_1, \quad \tau, \quad \rho_{11}, \quad \rho_{12}, \quad \rho_{22}, \quad \rho_{21}, \quad \sigma_\alpha$$

et l'on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \sigma_1 + \tau + \rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{22} + \rho_{21} + \sigma_\alpha.$$

On en conclut que ces courbes ont le degré virtuel -2, sauf τ qui a le degré virtuel -3.

On a ensuite

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma''_0 + \sigma_1 + \tau + 2(\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{22} + \rho_{21}) + \sigma_\alpha,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'''_0 + \sigma_1 + \tau + 2\rho_{11} + 3(\rho_{12} + \rho_{22}) + 2\rho_{21} + \sigma_\alpha,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(4)} + \sigma_1 + 2\tau + 3(\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{22}) + 2\rho_{21} + \sigma_\alpha.$$

On en conclut que :

Le point de diramation A' de la surface Φ est triple triplanaire pour cette surface; le cône tangent à ce point se compose de trois plans (σ_1), (τ), (σ_α), le second rencontrant chacun des deux autres suivant une droite, mais ceux-ci ne se rencontrant pas en dehors de A'. Au point A' sont infiniment voisins successifs deux points doubles biplanaires dont le premier est sur la droite commune aux plans (τ), (σ_α), le second étant ordinaire.