# SURFACES NON RATIONNELLES DE GENRES ARITHMÉTIQUE ET GÉOMÉTRIQUE NULS. ÉTAT DE LA QUESTION

par

Lucien GODEAUX

Membre d'honneur.

Le problème dont nous voulons nous occuper ici est né lorsque Castelnuovo, en 1896, a établi que les surfaces dont les genres arithmétique $p_a$ et géométrique $p_g$ sont nuls, ne sont pas nécessairement rationnelles. Pour qu'il en soit ainsi, il faut encore que le bigenre $P_2$ de la surface soit nul. Dès lors, il s'agissait de déterminer les surfaces algébriques non rationnelles telles que $p_a = p_g = 0$. C'est un problème sur lequel Enriques avait attiré notre attention lorsque, en 1912, nous étudions la Géométrie sur une surface algébrique sous sa direction. Nous avons souvent pensé à ce problème, mais ce n'est qu'en 1932 que nous avons pu faire un pas en construisant une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 2$. A la même époque, M. Campedelli était arrivé par d'autres méthodes à d'autres exemples. Plus tard, M. Burniat a construit d'autres exemples. Nos recherches ultérieures nous ont conduit à établir que si une surface de genres $p_a = p_g = 0$ possède un système bicanonique irréductible, elle est l'image d'une involution du second ordre privée de points unis appartenant à une surface algébrique possédant une courbe canonique isolée ($p_g = 1$).

Malgré ces travaux, le problème n'est pas résolu complètement. Dans les pages qui vont suivre, nous ferons l'historique des recherches et indiquerons les idées qui nous ont guidé dans celles qui sont à notre actif.

1. Le problème de déterminer les surfaces non rationnelles privées de courbe canonique est né le jour où Castelnuovo a établi les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface algébrique soit rationnelle. Clebsch avait établi que la courbe de genre zéro est rationnelle. Castelnuovo s'était posé la question de savoir si une surface de genres $p_a = p_g = o$ était rationnelle. La réponse est négative. Pour qu'une surface soit rationnelle, il faut que le procédé d'adjonction appliqué à un système linéaire ait un terme ; cela exige que le système bicanonique de la surface n'existe pas. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface soit rationnelle sont donc $p_a = P_2 = o$, la condition $P_2 = o$ entraînant $p_g = o$. Mais il fallait en outre prouver qu'il existe des surfaces non rationnelles ne possédant pas de courbe canonique. C'est ce que firent Castelnuovo et Enriques (6).

Castelnuovo a construit une surface F du septième ordre ayant une droite triple r, une conique double k ne rencontrant pas r et trois points doubles tacnodaux A,B,C dont les plans tangents à F, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ passent par la droite r. Les adjointes d'ordre trois à F doivent passer deux fois par r, une fois par k et par A,B,C. De telles surfaces n'existent pas. Les biadjointes sont des surfaces d'ordre six passant quatre fois par r, deux fois par k et touchant F aux points A,B,C. Elles se composent du plan de la conique k compté deux fois, des plans $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et d'un plan variable passant par r. Les courbes bicanoniques sont donc des quartiques planes possédant deux points doubles sur k et par suite elliptiques. La surface F a les genres $p_a = p_g = o$, $P_2 = 2$. Son genre linéaire $p^{(1)}$ est égal à l'unité. Castelnuovo a d'ailleurs formé l'équation de sa surface.

La surface d'Enriques est la surface F du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre et triplement par les sommets. Son équation est aisée à écrire. Les adjointes doivent être des quadriques passant par les arêtes du tétraèdre et n'existent pas. Il existe une seule biadjointe, du quatrième ordre, passant doublement par les arêtes du tétraèdre, elle est formée des quatre faces de celui-ci. La courbe bicanonique est d'ordre zéro et la surface F a les genres $p_a = p_g = o$, $P_2 = 1$. Le genre linéaire est $p^{(1)} = 1$.

Enriques a démontré plus tard (7) que toute surface présentant ces caractères pouvait se ramener par une transformation birationnelle à la surface F.

Rappelons que si le genre linéaire d'une surface est supérieur à l'unité, on a $P_2 = p_a + p^{(1)}$, donc si le système bicanonique est irréductible, $P_2 = p^{(1)}$.

Nous rappellerons également quelques propriétés de la surface d'Enriques dont la généralisation nous sera utile dans la suite.

Un système linéaire $|C|$ de courbes C de genre $\pi$ tracées sur F a le degré $2\pi-2$ et la dimension $\pi-1$. Son adjoint $|C'|$ a les mêmes caractères et les systèmes $|2C|$ et $|2C'|$ coïncident en un système de genre $4(\pi-1)+1$. Si par exemple les courbes C sont les sections planes de F, de genre quatre, les courbes C' sont les sections de F par les surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre. Le système $|2C| = |2C'|$ est découpé par les surfaces du sixième ordre passant doublement par les arêtes du tétraèdre, en dehors de celles-ci. Ses courbes ont le genre 13.

Enriques a montré (8) que la surface F était l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface dont les courbes canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro et caractérisée par les conditions $p_a = P_4 = 1$. Nous avons donné une démonstration fort simple de ce théorème (22). Supposons que, dans un espace linéaire $S_7$ à 7 dimensions, deux espaces linéaires à trois dimensions $\sigma_1$, $\sigma_2$ ne se rencontrant pas soient donnés. Dans $\sigma_1$, nous considérons une surface $F_1$ d'Enriques circonscrite au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ dont les sections planes seront dénotées $C_1$. En rapportant projectivement les surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ aux plans de l'espace $\sigma_2$, nous définissons une transformation birationnelle T qui fait correspondre à $F_1$ une surface d'Enriques $F_2$ circonscrite à un tétraèdre $A_1'A_2'A_3'A_4'$, dont les sections planes seront désignées par $C_2$. Les droites joignant les points homologues dans T des surfaces $F_1$, $F_2$ engendrent une variété $V_3$ à trois dimensions d'ordre douze. Soit d'autre part $\varphi_1 = 0$ une quadrique de $\sigma_1$ passant par les points $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$. La transformation T lui fait correspondre une quadrique $\varphi_2 = 0$ de $\sigma_2$ passant par les points $A_1'$,$A_2'$,$A_3'$,$A_4'$. Cela étant, l'hyperquadrique $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$ de $S_7$ est transformée en elle-même par T et son intersection avec $V_3$ comprend une surface $F_0$, d'ordre 12, sur laquelle T engendre une involution privée de points unis ayant pour images les surfaces $F_1$, $F_2$. Aux courbes $C_1$, $C_2$ correspondent sur $F_0$ des sections hyperplanes. Il est aisé de prouver, par l'emploi de la formule de Zeuthen sur les correspondances entre les courbes algébriques, que la surface $F_0$ a les caractères $p_a = P_4 = 1$.

2. Rappelons maintenant en quoi consiste le diviseur de Severi d'une surface algébrique (27).

Considérons sur une surface algébrique F des systèmes linéaires distincts $|C_1|$, $|C_2|$,...., $|C_\nu|$. Il peut se faire qu'il existe un entier positif $\lambda$ tel que les systèmes $|\lambda C_1|$, $|\lambda C_2|$ ,...., $|\lambda C_\nu|$ coïncident en un seul système. Eh bien, Severi a démontré que le nombre $\lambda$ avait un maximum $\sigma$ qui ne dépend que de la surface et est donc un caractère de celle-ci. Ce nombre $\sigma$ est le diviseur de Severi de la surface.

Si F est une surface d'Enriques, on a $\sigma = 2$ et c'était d'ailleurs au moment où Severi écrivait son mémoire, le seul cas connu où $\sigma$ était supérieur à l'unité. Le fait que $\sigma = 2$ pour la surface d'Enriques provient de ce que la surface est l'image d'une involution privée de points unis appartenant à une surface algébrique de diviseur $\sigma = 1$. Partant de cette remarque, nous avons construit des surfaces de diviseur quelconque (26). Nous nous limiterons ici à des surfaces régulières ($p_a = p_g$), ce qui suffit pour notre objet.

Considérons une surface F transformée en soi par une transformation birationnelle T de période p, privée de points unis sur la surface. Les groupes de p points transformés en eux-mêmes par T forment sur F une involution I. Soit F' une image de cette involution, c'est-à-dire une surface dont les points correspondent aux groupes de l'involution I. On peut construire sur F un système linéaire $|C|$ transformé en lui-même par T et contenant p systèmes $|C_1|$, $|C_2|$ ,...., $|C_p|$ appartenant à l'involution I. A ces systèmes correspondent sur F' des systèmes linéaires distincts $|C_1'|$, $|C_2'|$ ,...., $|C_p'|$. A une courbe $C_0$ de $|C|$ qui n'est pas transformée en soi par T correspond sur F' une courbe $C_0'$ et à cette courbe correspondent sur F, p courbes de $|C|$ : la courbe $C_0$ et ses transformées par T et ses puissances. Faisons varier $C_0$ d'une manière continue dans $|C|$. Si elle tend vers une courbe $C_1$, ou $C_2$,...., ou $C_p$, la courbe $C_0'$ tend vers une courbe $pC_1'$, ou $pC_2'$ ,...., ou $pC_p'$. On a donc

$$|C_0'| = |pC_1'| = |pC_2'| = .... = |pC_p'|,$$

car d'après un théorème d'Enriques, la courbe $C_0'$ appartient totalement à un système linéaire. Le diviseur de Severi de F' est donc supérieur à p et en général égal à p.

Il est aisé de construire des surfaces telles que F. Supposons pour plus de simplicité que p soit premier et prenons pour T une homographie cyclique H de période p, dans un espace linéaire $S_{p-1}$ à p—1 dimensions. Il suffit de prendre pour F la surface commune à $p-3$ hypersurfaces d'ordre p, linéairement indépendantes, transformées en elles-mêmes par T, qui est supposée ne posséder que p points unis, les hypersurfaces choisies ne passant pas par ces points.

Soit $|K|$ le système canonique de la surface F. On sait qu'il est transformé en lui-même par T. Il contient un certain nombre de systèmes linéaires partiels $|K_1|$, $|K_2|$ ,...., $|K_\nu|$ appartenant à l'involution I. Le système canonique de F', s'il existe, correspond à l'un des systèmes précédents. Nous avons démontré qu'il correspondait à celui qui avait la dimension minimum (10). De plus, entre le genre arithmétique $p_a$ de F et celui $p_a'$ de F', nous avons la relation (25)

$$p_a + 1 = p\,(p_a' + 1).$$

Si l'on veut que la surface F' soit régulière et privée de courbe canonique, on doit avoir $p_a' = 0$ et $p = p_a + 1$.

Dans ces conditions, on a $\nu = p-1$ et les courbes $K_1'$, $K_2'$, ...., $K'_{p-1}$ qui correspondent sur F' aux courbes $K_1$, $K_2$ ,...., $K_{p-1}$ sont des courbes isolées, c'est-à-dire que les systèmes $|K_1|$, $|K_2|$ ,...., $|K_{p-1}|$ sont de dimension zéro.

3. La recherche des surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 0$ est assez difficile par ce procédé, car il faut trouver des surfaces transformées en elles-mêmes par des transformations de période $p_a + 1$. Nous indiquerons ici les résultats que nous avons obtenus.

Le premier exemple est fourni par la surface du cinquième ordre F transformée en elle-même par une homographie H de période cinq ayant comme points unis les sommets d'un tétraèdre $\theta$. Nous supposons que la surface F ne passe pas par les points unis de H.

Le système canonique de F est celui de ses sections planes et les sections par les faces du tétraèdre $\theta$ sont les seules courbes canoniques $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$ transformées en elles-mêmes par H.

Il existe un système linéaire de dimension trois de surfaces cubiques découpant sur F les courbes $2K_1 + K_3$, $2K_2 + K_1$, $2K_3 + K_4$, $2K_4 + K_2$. En rapportant projectivement ces surfaces aux plans d'un espace $S_3$, on obtient une surface F' du septième ordre. Nous allons voir qu'elle possède un faisceau de courbes bicanoniques.

La surface F' passe quatre fois par les sommets d'un tétraèdre que nous désignerons par $0_1$, $0_2$, $0_3$, $0_4$. Désignons par $r_{ik}$ la droite $0_i\, 0_k$.

La droite $r_{34}$ est double pour la surface F' et les plans tangents à cette surface aux points de cette droite sont tous confondus avec le plan $0_2 0_3 0_4$. Toute section plane de la surface a un tacnode en son point de rencontre avec la droite $r_{34}$ Nous dirons que cette droite est tacnodale. Dans le plan $0_2 0_3 0_4$, la surface possède une droite double infiniment voisine de $r_{34}$. Les droites $r_{13}$, $r_{24}$, $r_{12}$ sont également tacnodales pour la surface, les plans tangents étant respectivement $0_1 0_3 0_4$, $0_1 0_2 0_4$, $0_1 0_2 0_3$. La surface passe simplement par les deux autres arêtes du tétraèdre, qui sont des droites exceptionnelles.

Les surfaces adjointes sont des surfaces cubiques passant par les arêtes doubles du tétraèdre, en y touchant les plans tangents. De telles surfaces n'existent pas. Les biadjointes sont du sixième ordre et se composent des quatre faces du tétraèdre et des quadriques passant par les droites doubles. Elles découpent sur F' des sextiques gauches de genre quatre.

Quant aux triadjointes, elles se composent des faces du tétraèdre comptées deux fois et des plans de l'espace.

La surface F' a les genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 2$, $P_3 = 4$, $p^{(1)} = 2$.

Cette surface était la première dont le système canonique était formé de courbes irréductibles, formant un faisceau (9).

Vers la même époque, M. Campedelli a construit des plans doubles de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$, 2 ou 3 (5). Nous en avons rendu compte dans notre exposé des Actualités scientifiques (11).

4. Le second exemple nous donnera une surface dont la courbe bicanonique est isolée mais d'ordre supérieur à zéro (12).

On sait que la variété de Segre représentant les couples de points d'une droite et d'un plan est une variété V à trois dimensions, d'ordre trois, dont les équations dans un espace linéaire $S_6$ à cinq dimensions s'écrivent

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Les espaces à trois dimensions

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0, \quad \lambda_0 x_3 + \lambda_1 x_4 + \lambda_2 x_5 = 0$$

coupent V suivant des quadriques et les plans

$$\mu_0 x_0 + \mu_1 x_3 = 0, \quad \mu_0 x_1 + \mu_1 x_1 = 0, \quad \mu_0 x_2 + \mu_1 x_5 = 0.$$

appartiennent à la variété.

Une hypersurface W du troisième ordre coupe V suivant une surface F d'ordre neuf. Le système canonique /K/ de cette surface est découpé par les plans de V. Il est donc formé de cubiques planes elliptiques K et la surface a les genres $p_a = p_g = 2$, $p^{(1)} = 1$.

L'homographie H de période trois,

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' : x_4' : x_5' = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^2 x_2 : x_3 : \varepsilon x_4 : \varepsilon^2 x_5,$$

où $\varepsilon$ est une racine cubique primitive de l'unité, transforme la variété V en elle-même. Nous prendrons pour W une variété transformée en elle-même par H, par exemple la variété d'équation

$$a_0 x_0^3 + a_1 x_1^3 + \ldots . + a_5 x_5^3 = 0.$$

L'homographie H engendre sur F une involution d'ordre trois privée de points unis et la surface F' qui représente cette involution a les genres $p_a = p_g = 0$.

L'homographie H transforme en soi le faisceau canonique /K/ et il y a dans ce faisceau deux cubiques $K_1$, $K_2$ transformées en elles-mêmes par H. Ces cubiques sont dans les plans

$$x_0 = x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = x_4 = x_5 = 0.$$

Aux courbes $K_1$, $K_2$ correspondent sur F' deux courbes $K_1'$, $K_2'$, elliptiques, et puisque une courbe K a pour adjoint le système /2K/, l'adjoint à $K_1'$ est soit la courbe $2K_1'$, soit la courbe $2K_2'$, soit la courbe $K_1' + K_2'$. Ce ne peut être la première ou la troisième, car alors $K_1'$ serait une courbe canonique de F'. C'est donc la courbe $2K_2'$. Nous écrirons $(K_1')_a = 2\,K_2'$. On a de même $(K_2')_a = 2K_1'$. On en déduit

$$(K_1' + K_2')_a = 3K_1' = 3K_2' \;, \quad (K_1' + K_2')_{aa} = 2(K_1' + K_2')$$

et par conséquent, la courbe $K_1' + K_2'$ est la courbe bicanonique de F'. On a $P_2 = 1$.

Au faisceau /K/ correspond sur F' un faisceau /K'/ de courbes elliptiques, qui est le système tricanonique de F' et qui comprend les courbes $3K_1'$ et $3K_2'$.

La surface F' a les caractères $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 1$, $P_3 = 2$.

5. Le dernier exemple va nous donner une surface contenant un réseau de courbes bicanoniques irréductibles (14).

Dans un espace linéaire $S_6$ à six dimensions, la surface intersection de quatre hyperquadriques a pour système canonique le système de ses sections hyperplanes et a donc les genres $p_a = p_g = 7$, $p^{(1)} = 17$, $P_2 = 24$. Considérons la surface F commune aux quatre hyperquadriques

$$a_1x_1x_7 + a_2x_2x_6 \quad a_3x_3x_5 + a_4x_4^2 = 0,$$
$$b_1x_1^2 + b_2x_5^2 + b_3x_3x_7 + b_4x_4x_6 = 0,$$
$$c_1x_2^2 + c_2x_6^2 + c_3x_1x_3 + c_4x_5x_7 = 0,$$
$$d_1x_3^2 + d_2x_7^2 + d_3x_1x_7 + d_4x_2x, = 0.$$

Elle est transformée en soi par l'homographie H de période huit d'équations

$$x_1':x_2': \ldots :x_7' = \varepsilon x_1:\varepsilon^2x_2: \ldots \varepsilon^7x_7 ,$$

où $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ est une racine primitive d'ordre huit de l'unité.

L'homographie H transforme F en soi et engendre sur cette surface une involution d'ordre huit privée de points unis. La surface F' image de cette involution a les genres $p_a = p_g = 0$.

Les sections de F par les hyperplans de la figure de référence sont des courbes $K_1, K_2, \ldots, K_7$ transformées en elles-mêmes par H. Il leur correspond sur F' des courbes $K_1', K_2', \ldots, K_7'$ de genre trois d'après la formule de Zeuthen. Le système bicanonique contient les courbes $K_1' + K_7'$, $K_2' + K_6'$, $K_3' + K_5'$, $2K_4'$ et a la dimension deux, donc $P_2 = 3$.

La surface F' a les caractères $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 3$, $P_3 = 7$.

Il importe de remarquer que bien que la courbe $2K_4'$ soit une courbe bicanonique, la courbe $K_4'$ n'est pas une courbe canonique.

On peut également remarquer que l'involution d'ordre quatre engendrée sur F par l'homographie H' a pour image une surface de genres $p_a = p_g = 1$, $P_2 = 6$, $p^{(1)} = 5$ et qu'à l'involution d'ordre huit de F correspond sur cette surface une involution d'ordre deux dont F' est l'image.

6. Dans le cas général, on obtient les résultats suivants (15) :

Si une surface algébrique régulière F de genre arithmétique $p_a = 2s > 2$, contient une involution cyclique d'ordre $p = 2s + 1$ dépourvue de points unis, la surface F' image de cette involution est dépourvue de courbe canonique mais possède des courbes bicanoniques irréductibles. Pour la surface F', on a $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = s$.

Le modèle projectif de la surface F dont les sections hyperplanes constituent le système canonique ne peut appartenir à une hyperquadrique.

Si une surface algébrique régulière F de genre arithmétique impair $p_a = 2s-1$ contient une involution cyclique d'ordre pair $p = 2s$, privée de points unis, la surface F' image de cette involution est dépourvue de courbe canonique mais possède des courbes bicanoniques irréductibles. La surface F' a les caractères $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = s-1$.

Le modèle projectif de la surface F dont les sections hyperplanes constituent le système canonique appartient à s hyperquadriques linéairement indépendantes. Chacune de ces hyperquadriques est représentée par une équation qui, lorsque l'on effectue l'homographie génératrice de l'involution, se reproduit multipliée par une puissance paire de $\varepsilon$, $\varepsilon$ étant une racine primitive d'ordre p de l'unité, et ces puissances sont différentes pour ces hyperquadriques.

7. En attaquant directement les surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, on peut obtenir des résultats importants.

Nous commencerons par étudier les surfaces F de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 1$, contenant une courbe bicanonique effective (16).

La courbe bicanonique $C_2$ est elliptique, de même que toutes les courbes pluricanoniques de la surface. La courbe tricanonique $C_3 \equiv C_2'$ ne peut contenir $C_2$, puisque $p_g = 0$, mais elle peut avoir quelques parties communes avec cette courbe, si celle-ci est réductible. Les courbes six-canoniques $3C_2$ et $2C_3$ sont certainement distinctes et les courbes six-canoniques $C_6$ forment au moins un faisceau. Les courbes $C_6$ sont adjointes aux courbes penta-canoniques $C_5$ et puisque celles-ci sont elliptiques, elles ne peuvent être rencontrées par leurs adjointes. Or, par un point d'une courbe $C_5$, il passe certainement une courbe $C_6$, par conséquent les courbes $C_5$ et $C_6$ ont une partie commune. Posons $C_5 = \gamma + \omega$ , $C_6 = \delta + \omega$ , les courbes $\gamma$ et $\delta$ n'ayant aucune partie commune. En utilisant les propriétés des adjointes aux courbes pluri-canoniques, on trouve les relations $C_3 = C_2 + \delta' - \delta$, $C_3 = C_2 + \gamma' - \gamma$, $\delta'$ et $\gamma'$ étant les adjointes à $\delta$ et $\gamma$. On voit que la courbe $C_2$ est nécessairement réductible en deux parties $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$, $C_2 = \Gamma_1 + \Gamma_2$, les courbes $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ étant elliptiques et les courbes $3\Gamma_1$, $3\Gamma_2$ déterminent un faisceau de courbes elliptiques tricanonique $|C_3| = |3\Gamma_1| = |3\Gamma_2|$.

On retrouve les résultats obtenus plus haut (n° 4), mais la surface obtenue en cet endroit n'est pas la plus générale. On peut d'ailleurs obtenir une autre surface cas particulier de la surface trouvée ici (13).

Appelons point de Noether d'une surface algébrique F un point uniplanaire auquel est infiniment voisin un point double tacnodal. Un tel point impose une condition aux surfaces adjointes d'ordre n-4 et les biadjointes passent par ce point et par le tacnode infiniment voisin. Cela étant, considérons une surface F du cinquième ordre ayant une droite double r et deux points doubles de Noether $A_1$, $A_2$ dont les plans tangents passent par r. La surface F est dépourvue de courbe canonique et possède une courbe bicanonique formée des sections de F par les plans $A_1r$, $A_2r$. Les cubiques elliptiques situées dans les plans passant par r sont les courbes tricanoniques de la surface. On a $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$, $P_3 = 1$.

En résumé, *une surface de genres* $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 1$ *contient un faisceau de courbes elliptiques* $|\Gamma|$ *possédant deux courbes elliptiques* $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ *telles que* $3\Gamma_1$, $3\Gamma_2$ *sont des courbes du faisceau* $|\Gamma|$. *La courbe* $\Gamma_1 + \Gamma_2$ *est la courbe bicanonique et les courbes* $\Gamma$ *sont les courbes tricanoniques.*

8. Considérons maintenant une surface F de genres $p_a = p_g = 0$ possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles. On a $p^{(1)} = P_2 = 2$ (17).

Désignons par $C_2$, $C_3$, $C_4$, $C_5$, $C_6$ les courbes bicanoniques, tricanoniques, ...., six-canoniques. Elles ont respectivement les genres 4, 7, 11, 16, 22.

Le système $(i+1)$ —canonique $|C_{i+1}|$ est l'adjoint au système i-canonique $|C_i|$, mais puisque $p_g = o$, aucune de ses courbes ne peut contenir une courbe $C_i$. Le système $|C_{i+1}|$ découpe donc sur une courbe $C_i$ la série canonique, complète puisque F est régulière. La dimension $P_{i+1}$ —l de $C_{i+1}$ est égale au genre de $C_i$ diminué d'une unité. On a donc $P_3 - 1 = 3$, $P_4 - 1 = 6$, $P_6 - 1 = 15$.

Le procédé de démonstration consiste à prouver qu'il existe une courbe $C_6$ qui est à la fois formée de trois courbes $C_2$ et de deux courbes $C_3$.

Les courbes $C_4$ formées de deux courbes $C_2$ sont en nombre doublement infini, par conséquent il existe des courbes $C_4$ non formées de deux courbes $C_2$. Elles forment un système triplement infini que nous désignerons par $|C^+_4|$.

Dans le système $|C_6|$, il existe des courbes formées d'une courbe $C^+_4$ et d'une courbe $C_2$ ; elles forment un système de dimension au moins égale à cinq. Il existe donc dans $|C_6|$ un système linéaire de dimension au plus égale à 9 dont les courbes ne sont pas formées d'une courbe $C^+_4$ et d'une courbe $C_2$. Désignons le par $|C^+_6|$.

Dans le système $|C^+_6|$ il existe des courbes formées de trois courbes $C_2$ et des courbes formées de deux courbes $C_3$. Elles forment des systèmes de dimensions respectives 3 et 6. Ces deux systèmes ont par conséquent au moins une courbe commune.

Une analyse des différentes possibilités montre qu'il existe sur F quatre courbes $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$, $\Gamma_4$ isolées, de genre deux, telles que

$$C_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_4,$$
$$C_3 \equiv 2\Gamma_1 + \Gamma_3 \equiv 2\Gamma_2 + \Gamma_4 \equiv 2\Gamma_3 + \Gamma_2 \equiv 2\Gamma_4 + \Gamma_1$$

Les courbes $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$, $\Gamma_4$ ont deux à deux un point commun.

Le système tricanonique $|C_3|$, de dimension trois, est complètement déterminé par les courbes données ci-dessus. Il possède deux points-base, les points communs aux courbes $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ et $\Gamma_4$. Il a le degré 9 mais le degré effectif 7. En rapportant projectivement les courbes $C_3$ aux plans de l'espace, on obtient comme modèle projectif de la surface F la surface du septième ordre rencontrée plus haut (n° 3), qui est donc la surface la plus générale de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 2$, possédant un faisceau irréductible de courbes bicanoniques.

9. Considérons maintenant une surface F de genres $p_a = p_g = o$ contenant un système de courbes bicanoniques irréductibles de dimension $P_2 - 1 > 2$ (19, 20 ,21).

Nous poserons $p^{(1)} = \pi$. Le procédé de démonstration consiste à prouver qu'une certaine courbe, ici une courbe 8-canonique, est à la fois la réunion de deux courbes tétracanoniques $C_4$ et celle d'une courbe tricanonique $C_3$ et d'une courbe pentacanonique $C_5$ qui ne soit pas elle-même formée par la réunion d'une courbe bicanonique $C_2$ et d'une courbe tricanonique $C_3$.

Dans le système pentacanonique $|C_5|$, de dimension 10 $(\pi-1)$, il existe des courbes formées d'une courbe tricanonique et d'une courbe bicanonique ; elles forment un système de dimension $4(\pi-1)$. Il existe donc dans $|C_5|$ un système de dimension $6(\pi-1)-1$ ne comprenant aucune courbe formée d'une courbe tricanonique et d'une courbe bicanonique. Nous le désignerons par $|C_5^+|$.

Dans le système $|C_8|$, il existe des courbes formées de deux courbes tétracanoniques $C_4$ ; elles forment un système $\Sigma_1$ de dimension $12(\pi-1)$.

Dans le système $|C_8|$, il existe des courbes formées d'une courbe $C_5^+$ et d'une courbe $C_3$ ; elles forment un système $\Sigma_2$ de dimension $9(\pi-1)-1$.

Enfin, dans le système $|C_8|$, il y a des courbes qui sont formées de deux courbes $C_3$ et d'une courbe $C_2$ ; elles forment un système de dimension $7(\pi-1)$ et par conséquent les courbes $C_8$ qui ne sont pas formées de cette manière forment un système de dimensions $21(\pi-1)-1$ que nous désignerons par $C_8^+$.

Les courbes des systèmes $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ appartiennent au système $|C_8^+$ et comme on a

$$12(\pi-1) + 9(\pi-1) - 1 = 21(\pi-1) - 1,$$

$\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ ont au moins une courbe commune.

Il existe donc une courbe $C_8$ dégénérée d'une part en deux coubes $C_4$ et d'autre part en une $C_5^+$ et en une courbe $C_3$. Cela exige que l'on ait

$$C_8 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2, C_5^+ \equiv x_1 + x_2, \; C_4 \equiv \Gamma_1 + x_1 \equiv \Gamma_2 + x_2$$

et comme on a

$|C_3'| = |C_4|$, on a $X_1 = \Gamma_2'$, $X_2 = \Gamma_1'$ et

$|C_3| = |\Gamma_1 + \Gamma_2|, |C_4| = |\Gamma_1 + \Gamma_2'| = |\Gamma_2 + \Gamma_1'|, |C_5| = |\Gamma_1 + \Gamma_2'|.$

L'analyse de ces systèmes montre que l'une des courbes $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ est isolée, de genre $\pi$ et que l'autre est adjointe à la première. Appelons $\Gamma$ la première, la seconde étant $\Gamma'$. Le système bicanonique est $|C_2| = |2\Gamma|$ bien que la courbe $\Gamma$ ne soit pas une courbe canonique, puisque $|2\Gamma|$ et $|\Gamma'|$ sont distincts.

On a $|C_3| = |\Gamma + \Gamma'|, |C_4| = |2\Gamma'| = |4\Gamma|$, d'où $2\Gamma' \equiv 4\Gamma$.

On en conclut que la surface F a le diviseur de Severi $\sigma = 2$.

En résumé, *si une surface algébrique F de genres* $p_a = p_g = 0$ *possède un système bicanonique irréductible de dimension* $P_2 - 1 > 2$, *il existe sur la surface une courbe isolée* $\Gamma$ *de genre* $P_2$, *telle que les systèmes bicanonique, tricanonique, tétracanonique soient* $|2\Gamma|$, $|\Gamma + \Gamma'|$, $|4\Gamma|$ *sans que* $\Gamma$ *soit une courbe canonique.*

On a plus généralement

$|C_{2i}| = |2i\Gamma|, |C_{2i+1}| = |(2i-1)\Gamma + \Gamma'|$

et il existe à côté de ces systèmes les systèmes

$|\overline{C}_{2i}| = |2(i-1)\Gamma + \Gamma'|, |\overline{C}_{2i+1}| = |(2i+1)\Gamma|.$

On a d'ailleurs

$|2C_{2i}| = |2\overline{C}_{2i}|, |2C_{2i+1}| = |2\overline{C}_{2i+1}|.$

10. La surface F représente une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genre $p_g = 1$, c'est-à-dire possédant une seule courbe canonique. Nous avions obtenu ce théorème en utilisant une méthode analogue à celle suivie par Enriques dans le cas des surfaces de bigenre un (8). Nous l'avons ensuite établi par une méthode plus simple (23).

Observons tout d'abord que le système $|C_4|$ est simple, c'est-à-dire que celles de ses courbes qui passent par un point ne passent pas en conséquence par un autre point. Il en est de même du système $|\overline{C}_4|$. Ces systèmes ont la dimension 6 , où nous avons posé pour abréger $\nu = \pi + 1$.

Considérons dans un espace linéaire $S_{12\nu+1}$ à $12\nu+1$ dimensions deux espaces linéaires $\Sigma$, $\overline{\Sigma}$ à $6\nu$ dimensions ne se rencontrant pas. Rapportons projectivement les courbes $C_4$ aux hyperplans de $\Sigma$ et les courbes $\overline{C}_4$ aux hyperplans de $\overline{\Sigma}$. Nous obtenons dans $\Sigma$ une surface que nous désignerons encore par F et dans $\overline{\Sigma}$ une surface que nous désignerons par $\overline{F}$.

Les droites joignant les points homologues de F et $\overline{F}$ engendrent une variété à trois dimensions $V_3$ d'ordre $48v$.

Une hyperquadrique $\varphi_2 = o$ de $\Sigma$ ne contenant pas F découpe sur cette surface une courbe $C_8$. A cette courbe correspond sur $\overline{F}$ une courbe $C_8$ découpée par une hyperquadrique $\overline{\varphi}_2 = o$ de $\overline{\Sigma}$.

L'hyperquadrique de $S_{12v+1}$ d'équation $\varphi_2 + \overline{\varphi}_2 = o$ coupe la variété $V_3$ suivant la surface lieu des droites s'appuyant sur les deux courbes $C_8$ en des points homologues et suivant une surface $F_0$ d'ordre $64v$. Cette surface est transformée en soi par l'homographie biaxiale harmonique H ayant comme axes $\Sigma$, $\overline{\Sigma}$. Sur $F_0$, cette homographie détermine une involution du second ordre privée de points unis dont les surfaces F et $\overline{F}$ sont des images. Aux courbes $C_4$ et $\overline{C}_4$ correspondent des sections hyperplanes de la surface $F_0$, sections qui sont des courbes tétracanoniques de cette surface. A la courbe $\Gamma$ de F correspond sur $\overline{F}$ une courbe que nous désignerons par $\overline{\Gamma}$. Les droites s'appuyant en des points homologues sur les courbes $\Gamma$ et $\overline{\Gamma}$ engendrent une surface coupant $F_0$ suivant la courbe canonique de cette surface, qui a les genres $p_a = p_g = 1$, $P_2 = 2v$.

11. Il importe de comparer le procédé utilisé au n° 2 pour construire des surfaces de genres $p_a = p_g = o$ avec le théorème établi au n° 9. Le premier procédé nous a donné des surfaces pour lesquelles $P_2$ est au plus égal à deux. Nous avons pu démontrer qu'une surface de genres $p_a = p_g = o$, $P_2 > 2$ ne peut être l'image d'une involution cyclique privée de points unis que si l'ordre de cette involution est une puissance de deux (24).

12. Nous terminerons en indiquant les surfaces obtenues par M. Burniat par des méthodes essentiellement différentes. Ce géomètre considère des plans quadruples abéliens. On donne ce nom à une surface F transformée en soi par trois transformations birationnelles involutives

formant un groupe trirectangle, engendrant une involution du quatrième ordre rationnelle, c'est-à-dire dont l'image est un plan.

Dans une première note (2), M. Burniat construit des plans quadruples abéliens de genres $p_a = p_g = 0$ dont les courbes bicanoniques sont formées au moyen de courbes elliptiques d'un faisceau. Dans une seconde note, il forme des plans quadruples abéliens de genres $p_g = 0$, $P_2 = 3,4,5,6$ ou 7, dont le système tricanonique est irréductible (3).

Il convient d'ajouter que les procédés utilisés par M. Burniat lui ont permis de construire un grand nombre de surfaces possédant des courbes canoniques, démontrant ainsi l'existence de ces surfaces. On trouvera l'exposé de ces travaux dans un mémoire récent (4).


1. BURNIAT, *Recherches sur les surfaces de bigenre un* (*Mémoires de la Soc. Roy. des Sciences de Liège*, 1936, pp. 1-100).
2. — *Surfaces de genre géométrique nul et de bigenre quelconque* (R.A.L., 1° sem. 1954, pp. 459-463).
3. — *Surfaces algébriques régulières de genre géométrique* $p_g=0,1,2,2$ *et de genre linéaire* 3, 4, ..., 8pg+7 (*Colloque de géométrie algébrique du C.B.R.M.*, Bruxelles, 1959, pp. 129-146).
4. — *A propos de la classification des surfaces algébriques* (*Simposio di Geometria algebrica*, Roma, 1965, pp. 51-57).
   — *Sur les surfaces de genre* $P_{12} > 1$ (*Annali di Matematica*, 1966, t. LXXI, pp. 1-24).
5. CAMPEDELLI, *Sui piani doppi con curva di diramazione dell'ottavo ordine* (*R.A.L.*, 1° sem., 1932, pp. 203-208).
   — *Sui piani dippi con curva di diramazione del decimo ordine* (R.A.L., 1° sem. 1932, pp. 358-362).
   — *Sopra alcuni piani doppi notevoli con curva di diramazione del decimo ordine* (R.A.L., 1° sem. 1932, pp. 536-542).
6. CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero* (*Memorie della Società Italiana dei* XL, 1896, pp. 103-123 ; Memorie scelte, Bologna, Zanichelli, 1937, pp. 307-334).
7. ENRIQUES, *Sopra le superficie di bigenere uno* (*Memorie della Società Italiana dei* XL, 1906, pp. 327-352 ; *Memorie scelte*, Bologna, Zanichelli, t. II, 1959, pp. 241-272).
8. — *Un' osservazione relativa alle superficie di bigenre uno* (*Rendiconto della Academia delle Scienze di Bologna*, 1908, pp. 40-45; *Memorie scelte*, Bologna, Zanichelli, 1959, t. II, pp. 303-306).
9. GODEAUX, *Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux* (*R.A.L.*, 2° sem. 1931, pp. 479-481).
   — *Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique zéro dont le genre linéaire est égal à deux* (B.A.B., 1932, pp. 26-37).
10. — *Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis appartenant à une surface algébrique*, (B.A.B., 1932, pp. 26-37).


(1) Abréviations : B.A.B. Bulletin de l'Académie royale de Belgique.
B.S.L. Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège.
R.A.L. Rendiconti della Academia Nazionale dei Lincei.

11. — *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (*Actualités scientifiques*, Paris, Hermann, 1934, n° 123).
12. — *Sur une surface algébrique non rationnelle de genres arithmétique et géométrique nuls et de genre linéaire un* (*B.S.L.*, 1934, 184-187).
13. — *Construction d'une surface du cinquième ordre de genres zéro et de bigenre un* (*B.A.B.*, 1947, pp. 492-501).
14. — *Sur la construction des surfaces non rationnelles de genres zéro* (*B.A.B.*, 1949, pp. 688-693).
15. — *Les surfaces algébriques de genres nuls à courbes bicanoniques irréductibles* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1958, pp. 1-14).
16. — *Sulle superficie algebriche di genere zero e bigenere uno* (*Bolletino dell'Unione Matematica Italiana*, 1958, pp. 531-534).
— *Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique nuls possédant une courbe bicanonique effective* (*B.A.B.*, 1958, pp. 809-812).
17. — *Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique nuls possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles* (*B.A.B.*, 1958, pp. 738-749, 942-944).
— *Sulle superficie algebriche di generi* Pa = Pg = 0 *con un fascio di curve bicanoniche irriducibile* (*Rendiconti del Seminario Matematico di Messina*, 1958-59, pp. 52-57).
18. — *Note sur les surfaces de genres zéro possédant un réseau irréductible de courbes bicanoniques* (*B.A.B.*, 1959, pp. 52-68, 188-196).
19. — *Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique zéro dont le système bicanonique est irréductible* (*B.A.B.*, 1959, pp. 362-372 ; 1960, pp. 47-52, 743-747 ; 1961, pp. 1118-1127).
— *Sulle superficie algebriche di genere zero con un sistema bicanonico irriducibile* (*Atti del Congresso di Napoli*, 1959, pp. 408-410).
— *Remarques sur les surfaces non rationnelles de genre zéro* (*B.A.B.*, 1963, pp. 8-10).
— *Sur les surfaces de genres nuls possédant des courbes bicanoniques irréductibles* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1960, pp. 221-230).
20. — *Quelques résultats sur les surfaces de genres zéro possédant des courbes bicanoniques irréductibles* (*Colloque de Géométrie algébrique de C.B.R.M.*, Bruxelles, 1959, pp. 147-159).
21. — *Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1965, pp. 25-41).
22. — *Une démonstration nouvelle d'un théorème de F. Enriques* (*R.A.L.*, 2° sem. 1966, pp. 297-299).
23. — *Construction d'une surface algébrique à sections hyperplanes bicanoniques possédant une seule courbe canonique* (*B.A.B.*, 1966, pp. 1058-1063).
— *Construction d'une surface à sections hyperplanes tricanoniques possédant une seule courbe canonique* (*B.A.B.*, 1966, pp. 1200-1205).
— *Sur les surfaces contenant une involution non rationnelle de genres arithmétique et géométrique nuls* (*B.A.B.*, 1966, pp. 1388-1396).
24. — *Observation sur les surfaces non rationnelles de genres zéro* (*B.A.B.*, 1967, pp. 417-421).
— *Sur les surfaces algébriques de genres zéro e tde bigenre supérieur à deux* (*B.A.B.*, 1967, pp. 547-551).
25. — *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Roma, Edizione Cremonese, 1963).
26. — *Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité* (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 1914, pp. 362-368).
— *Exemples de surfaces de diviseur supérieur à l'unité* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1915, pp. 182-185).
27. SEVERI, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1908, pp. 449-468).

# BIBLIOGRAPHIE

HERMAS, *Le Pasteur*, Introduction, texte critique, traduction et notes par Robert JOLY (Collection « Sources chrétiennes », n° 53), 2e édition. 1 vol. 443 pp. Paris, Editions du Cerf, 1968.

En 1959, Robert Joly recevait pour son édition du *Pasteur* le Prix de notre Société. Le volume a fait son chemin et est devenu un véritable instrument de travail pour quiconque s'occupe de l'histoire ancienne du christianisme. On est heureux de le voir aujourd'hui réédité. Il a été mis à jour suivant le procédé le plus rationnel et le plus commode, du moment qu'il n'est pas possible de recomposer le texte. Des astérisques placés en marge renvoient à un appendice à la fin du volume (p. 407-442) qui complète la bibliographie, tient compte d'informations nouvelles et discute certains points qui ont fait l'objet de controverses récentes.

Une nouvelle carrière attend, sous sa forme rénovée, cette précieuse édition.

R. CRAHAY.

Daniel DONNET. *Le traité ΠΕΡΙ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ ΛΟΓΟΥ de Grégoire de Corinthe. Etude de la tradition manuscrite, édition, traduction et commentaire* (Collection « Etudes de philologie, d'archéologie et d'histoire anciennes publiées par l'Institut Historique Belge de Rome ». Tome X), 1 vol. 388 pp., Bruxelles et Rome, 1967.

L'activité de Grégoire, évêque de Corinthe, se situe dans la première moitié du XIIe siècle. Il a laissé un ouvrage religieux et quelques autres sur des sujets de grammaire, parmi lesquels le présent traité, resté inédit jusqu'à ce jour.

M. Donnet en a examiné quarante-trois manuscrits, d'où ressort d'abord l'existence de deux versions différentes : l'une, la mieux attestée, qu'il appelle « le texte primitif » ; l'autre, un remaniement, qu'il désigne comme « la recension ».

L'auteur s'est livré à une collation intégrale dont les conclusions contredisent nettement celles qu'on tirerait a priori de la date des manuscrits. Pour le texte primitif, ils se groupent en trois familles, présentant de nombreux accidents de transmission. La recension ne se rattache à aucune d'entre elles. C'est le texte primitif que M. Donnet a édité, traduit et annoté, sans escamoter aucune des difficultés qui se posaient à chacune de ces étapes.

Le commentaire est une mine de rapprochements intéressants. En annexe nous trouvons des extraits de la recension, des scolies et des textes apocryphes ou interpolés. Des index des termes grammaticaux et des mots grecs expliqués, un répertoire des manuscrits et une copieuse bibliographie terminent le livre.