Dai « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei »
(Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali)
serie VIII, vol. VI, fasc. 6

Geometria. — *Sulla costruzione di certe superficie algebriche irregolari.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

Si conoscono pochi esempi di superficie algebriche irregolari; non è quindi inutile dare un procedimento per la costruzione di superficie di tale natura. È questo l'oggetto della presente breve Nota.

1. Consideriamo una curva algebrica Γ, di genere π, non iperellittica, contenente un'involuzione ciclica i_p, di genere $\pi' > 1$, di ordine primo $p = 2\nu + 1$, priva di punti uniti. Denotiamo con Γ' una curva che rappresenti tale involuzione.

Fra il genere π di Γ e quello π' di Γ' intercede, per la formula di Zeuthen, la relazione $\pi = p(\pi' - 1) + 1$.

L'involuzione i_p è generata da una trasformazione birazionale τ di Γ in sè. La serie canonica $|G|$ di Γ vien mutata in sè da τ, ed in essa si trovano delle serie parziali $|G_0|, |G_1|, \cdots, |G_k|$, ciascuna appartenente all'involuzione i_p e - come tale - non ampliabile. A queste serie corrispondono, sulla curva Γ', delle serie complete $|G'_0|, |G'_1|, \cdots, |G'_k|$, aventi ciascuna l'ordine $2\pi' - 2$. Una determinata di queste, ad esempio $|G'_0|$, è la serie canonica di Γ' ed ha quindi dimensione $\pi' - 1$; le altre sono serie paracanoniche ed hanno ciascuna dimensione $\pi' - 2$. In base alla teoria delle omografie risulta

$$\pi' - 1 + k(\pi' - 2) + k + 1 = \pi = p(\pi' - 1) + 1,$$

eppertanto $k = p - 1$.

(*) Nella seduta dell'8 giugno 1949.

Prendiamo come modello proiettivo di Γ la relativa curva canonica, di ordine $2\pi - 2$, nello spazio $S_{\pi-1}$. Su questa curva, la trasformazione τ vien subordinata da un'omografia H di $S_{\pi-1}$, di periodo p, la quale possiede p assi puntuali $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{p-1}$, il primo di dimensione $\pi' - 1$, gli altri di dimensione $\pi' - 2$. Questi assi non incontrano la curva.

A questi spazi possiamo associare, nel modo ben noto, le varie radici di ordine p dell'unità; e le notazioni possono scegliersi in guisa da associare a $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{p-1}$ rispettivamente $1, \varepsilon, \cdots, \varepsilon^{p-1}$; ove ε denota una radice primitiva.

2. Consideriamo ora la superficie F che rappresenta le coppie di punti non ordinati della curva Γ. Possiamo prendere come modello proiettivo di questa superficie l'insieme delle corde di Γ, oppure la superficie che rappresenta tale insieme sulla grassmanniana delle rette di $S_{\pi-1}$.

Sia P un punto di F, P_1 e P_2 la coppia di punti corrispondente su Γ, P'_1 e P'_2 i punti che τ fa corrispondere a P_1 e P_2, infine P' il punto di F che rappresenta la coppia P'_1, P'_2. I punti P e P' si corrispondono in una trasformazione birazionale T di F in sè, di periodo p, la quale genera su F un'involuzione I_p, d'ordine p, evidentemente priva di punti uniti.

I punti di un gruppo di i_p, associati coi punti di un altro gruppo di questa involuzione, dànno sulla F un gruppo di p^2 punti. Tutti i gruppi di p^2 punti così ottenuti formano su F un'involuzione J, di ordine p^2, la quale è composta coll'involuzione I_p ed ammette infiniti punti uniti.

La superficie Φ che rappresenta le coppie di punti non ordinati della curva Γ' è evidentemente un'immagine dell'involuzione J. Se F' è un'immagine dell'involuzione I_p, all'involuzione J corrisponderà sopra F' un'involuzione I'_p, di ordine p (con infiniti punti uniti), avente la superficie Φ come immagine.

Le F e Φ hanno rispettivamente le irregolarità π e π'; dunque la F' ha un'irregolarità compresa nell'intervallo tra π' ed π, inclusi gli estremi.

3. Le curve canoniche C di F sono date dalle rigate delle corde di Γ che appartengono ai complessi lineari di rette di $S_{\pi-1}$, ed i generi della F sono [1]

$$p_g = \binom{\pi}{2} \quad , \quad p_a = \binom{\pi}{2} - \pi .$$

Consideriamo una $g^1_{2\pi-2}$ canonica di Γ. Le coppie di punti dei singoli gruppi di questa serie dànno sopra F una curva canonica C. Se la $g^1_{2\pi-2}$ appartiene a $|G_0|$, la curva canonica corrispondente contiene ∞^1 gruppi dell'involuzione J, e ad essa corrisponde sulla Φ una curva canonica. Dunque, alla curva C considerata corrisponde sulla F' una curva canonica di questa superficie; e viceversa.

Ne consegue che i complessi lineari di rette di $S_{\pi-1}$, che corrispondono a curve canoniche di F trasformate di curve canoniche di F', sono caratterizzati dalla proprietà che il primo membro della loro equazione può essere normato mediante un fattore opportuno, in guisa da restare inalterato quando gli si applichi l'omografia H.

(1) SEVERI, « Atti Accad. di Torino », 1903.

Parimenti le rette di $S_{\pi-1}$, le cui coordinate, opportunamente normate, restano invariate di fronte alla H, sono precisamente quelle che congiungono due punti distinti di σ_0, od un punto di σ_1 con un punto di σ_{p-1}, od un punto di σ_2 con un punto di $\sigma_{p-2}, \cdots$. Ne risulta che il genere geometrico di F′ vale

$$p'_g = \binom{\pi'}{2} + \frac{1}{2}(p-1)(\pi'-1)^2 = \frac{1}{2}(\pi'-1)[p(\pi'-1)+1].$$

4. Tra il genere aritmetico p'_a di F′ e quello p_a di F intercede la relazione (2)

$$p(p'_a+1) = p_a + 1.$$

Tenendo conto del valore di p_a e di quello di π, da qui si deduce che:

$$p'_a = \frac{1}{2}(\pi'-1)[p(\pi'-1)-1]-1.$$

L'irregolarità di F′ è dunque data da

$$p'_g - p'_a = \frac{1}{2}(\pi'-1)[p(\pi'-1)+1-p(\pi'-1)+1]-1 = \pi',$$

ossia:

La superficie F′ *ha l'irregolarità* π'.

5. Nel sistema canonico $|C|$ di F, vi sono p sistemi lineari parziali appartenenti alla involuzione I_p e – come tali – non ampliabili. Le curve di ognuno di questi sistemi sono date dai complessi lineari di rette di $S_{\pi-1}$ le cui equazioni si riproducono, in forza all'omografia H, moltiplicate per una potenza di ε. Si hanno così, sulla superficie F′, p sistemi lineari; l'uno è il sistema canonico $|C'|$; gli altri verranno designati con $|C'_1|, |C'_2|, \cdots, |C'_{p-1}|$.

La dimensione aumentata di un'unità del sistema corrispondente alla radice ε^2, ad esempio, sarà eguale al massimo numero di rette indipendenti di $S_{\pi-1}$ le cui coordinate si riproducono, in forza dell'omografia H, moltiplicate per ε^2. Si trova così

$$\binom{\pi'-1}{2} + \pi'(\pi'-1) + \frac{1}{2}(p-3)(\pi'-1)^2 = \frac{1}{2}(\pi'-1)[p(\pi'-1)+1],$$

sicchè ciascuno dei sistemi $|C'_1|, |C'_2|, \cdots, |C'_{p-1}|$ ha la stessa dimensione del sistema canonico $|C'|$.

Rammentiamo che, d'altro canto, su F′ risulta (3)

$$pC' \equiv pC'_1 \equiv \cdots \equiv pC'_{p-1}.$$

(2) SEVERI, «Rend. Istituto Lomb.», 1903. Per il caso particolare qui utilizzato, ved. anche la nostra monografia *Sulle involuzioni cicliche appartenenti ad una superficie algebrica.* (Paris, Hermann, 1935).

(3) Ved. la nostra monografia citata in (2).

Roma, 1949. — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei.