et trois équations de la forme

$$
\begin{aligned}
\text{(II)}\quad & 2\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}\varepsilon_{\lambda\lambda}s_\lambda-\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left[-\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\varepsilon_{\mu\nu}\sqrt{s_\mu s_\nu}+\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\lambda\nu}\sqrt{s_\lambda s_\nu}+\frac{\partial}{\partial x_\nu}\varepsilon_{\mu\lambda}\sqrt{s_\mu s_\lambda}\right]\right\}\\
&=-\frac{\varepsilon_{\lambda\lambda}}{s_\lambda}\frac{\partial s_\lambda}{\partial x_\mu}\frac{\partial s_\lambda}{\partial x_\nu}-\frac{\varepsilon_{\mu\mu}}{s_\mu}\frac{\partial s_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial s_\lambda}{\partial x_\mu}-\frac{\varepsilon_{\nu\nu}}{s_\nu}\frac{\partial s_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial s_\lambda}{\partial x_\nu}-\frac{\varepsilon_{\lambda\mu}}{\sqrt{s_\lambda s_\mu}}\left\{\frac{\partial s_\mu}{\partial x_\lambda}\frac{\partial s_\lambda}{\partial x_\nu}-\frac{\partial s_\lambda}{\partial x_\lambda}\frac{\partial s_\mu}{\partial x_\nu}\right\}\\
&\quad-\frac{\varepsilon_{\lambda\nu}}{\sqrt{s_\lambda s_\nu}}\left\{\frac{\partial s_\lambda}{\partial x_\mu}\frac{\partial s_\nu}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial s_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial s_\lambda}{\partial x_\lambda}\right\}-\frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\sqrt{s_\mu s_\nu}}\left\{\frac{\partial s_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial s_\lambda}{\partial x_\nu}+\frac{\partial s_\mu}{\partial x_\lambda}\frac{\partial s_\nu}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial s_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial s_\lambda}{\partial x_\mu}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{s_\lambda}\Bigg\{\frac{\partial s_\lambda}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\varepsilon_{\lambda\lambda}s_\lambda+\frac{\partial s_\lambda}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\lambda\lambda}s_\lambda\\
&\qquad\qquad-\frac{\partial s_\lambda}{\partial x_\lambda}\left[-\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\varepsilon_{\mu\nu}\sqrt{s_\mu s_\nu}+\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\nu\lambda}\sqrt{s_\nu s_\lambda}+\frac{\partial}{\partial x_\nu}\varepsilon_{\lambda\mu}\sqrt{s_\lambda s_\mu}\right]\Bigg\}\\
&\quad+\frac{1}{s_\mu}\Bigg\{\frac{\partial s_\lambda}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\varepsilon_{\mu\mu}s_\mu-\frac{\partial s_\mu}{\partial x_\nu}\left[-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\lambda\lambda}s_\lambda+2\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\varepsilon_{\lambda\mu}\sqrt{s_\lambda s_\mu}\right]\\
&\qquad\qquad+\frac{\partial s_\mu}{\partial x_\lambda}\left[-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\nu\lambda}\sqrt{s_\nu s_\lambda}+\frac{\partial}{\partial x_\nu}\varepsilon_{\lambda\mu}\sqrt{s_\lambda s_\mu}+\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\varepsilon_{\mu\nu}\sqrt{s_\mu s_\nu}\right]\Bigg\}\\
&\quad+\frac{1}{s_\nu}\Bigg\{\frac{\partial s_\lambda}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\nu\nu}s_\nu-\frac{\partial s_\nu}{\partial x_\mu}\left[-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\varepsilon_{\lambda\lambda}s_\lambda+2\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\varepsilon_{\lambda\nu}\sqrt{s_\lambda s_\nu}\right]\\
&\qquad\qquad+\frac{\partial s_\nu}{\partial x_\lambda}\left[-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\varepsilon_{\mu\lambda}\sqrt{s_\mu s_\lambda}+\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\lambda\nu}\sqrt{s_\lambda s_\nu}+\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\varepsilon_{\mu\nu}\sqrt{s_\mu s_\nu}\right]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

qui constituent les six équations correspondantes de compatibilité pour $\varepsilon_{\mu\nu}$. Dans le cas simple où $s_1 = s_2 = s_3 = 1$, on retrouve immédiatement les équations de compatibilité bien connues de Saint-Venant.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Sur les variétés algébriques de genres un contenant des involutions cycliques.* Note de M. **Lucien Godeaux**, présentée par M. Elie Cartan.

Soit V une variété algébrique à trois dimensions, privée d'intégrales de Picard de première espèce, sur laquelle tout système linéaire de surfaces soit son propre adjoint. Les surfaces canonique et pluricanonique de V sont d'ordre zéro, le genre géométrique et les plurigenres de cette variété sont égaux à l'unité. Supposons que V possède une involution cyclique I_p d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Soit Ω une variété image de l'involution I_p. Si les plurigenres de Ω ne sont pas tous nuls, l'opération d'adjonction sur cette variété est l'identité ou a la période p.

Construisons sur V un système linéaire complet de surfaces $|F|$ contenant p systèmes linéaires partiels $|F_1|, |F_2|, \ldots, |F_p|$ composés au moyen de I_p, l'un de ces systèmes, par exemple $|F_1|$, étant dépourvu de points-base. On peut prendre, comme modèle projectif de V, une variété normale dont les sections hyperplanes sont les surfaces F. Soit S_r l'espace linéaire contenant cette variété. L'involution I_p est engendrée sur V par une homographie H de S_r, possédant p axes ponctuels $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(p)}$ dont le premier seul rencontre V (aux points unis de I_p). Désignons par Σ_i le système linéaire d'hyperplans passant par les axes de H sauf par $S^{(i)}$. Les surfaces $F_1, F_2, \ldots, F_p$ sont découpées sur V respectivement par les hyperplans de $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$.

Soient A un point uni de I_p, α l'espace tangent à V en ce point. Le point A appartient à $S^{(1)}$ et l'espace α est uni pour H. Cet espace s'appuie suivant un plan sur un des axes $S^{(2)}, S^{(3)}, \ldots, S^{(p)}$, ou suivant une droite sur un de ces axes et suivant un point sur un autre, ou suivant trois points sur trois de ces axes. Dans le premier cas, on a nécessairement $p = 2$. Examinons le second cas.

Supposons que α s'appuie suivant une droite a sur $S^{(2)}$ et suivant un point A′ sur $S^{(3)}$.

Les surfaces F_2 ont un point simple en A, le plan tangent en ce point passant par A′ et coupant a en un point. Les groupes de I_p appartenant à une surface F_2 forment sur celle-ci une involution ayant en A un point uni non parfait [1]. Les surfaces F_3 touchent en A le plan Aa et les groupes de I_p appartenant à une de ces surfaces forment une involution ayant en A un point uni parfait.

Si, sur la variété Ω, tout système linéaire de surfaces est son propre adjoint, la courbe commune à deux surfaces F_3 doit avoir la multiplicité $p-2$ en A. Si, au contraire, l'opération d'adjonction sur la variété Ω a la période p, les surfaces F_1 passant par A doivent couper les surfaces F_2 suivant des courbes ayant un point double ordinaire en A, l'une des tangentes en ce point étant la droite AA′, l'autre appartenant au plan Aa.

Considérons un hyperplan de Σ_1 ne passant pas par A, deux hyperplans de Σ_2 et un hyperplan de Σ_3. Ces hyperplans ont en commun un espace ne rencontrant pas en général α. Projetons sur α à partir de cet espace les surfaces $F_1, F_2, \ldots, F_p$. On obtient ainsi des surfaces unies pour l'homographie h induite par H dans α. Par ce procédé, on peut étudier le compor-

---

(1) Au sujet des définitions et des propriétés des involutions utilisées ici, voir notre exposé *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*, Paris, 1935.

tement de l'involution I_p dans le voisinage du point A sur V. On parvient ainsi aux résultats suivants :

1° Si, sur Ω, tout système linéaire de surfaces est son propre adjoint, on a $p \geqq 5$. Dans le voisinage du point A, se trouvent un élément de surface tangent au plan $\mathrm{A}a$, sur lequel les domaines d'ordre 1, 2, ..., $p-3$ de A sont formés de points unis de I_p, et un élément de courbe tangent à la droite AA' sur lequel se trouvent $1/2(p-3)$ points infiniment voisins successifs de A, unis de I_p.

2° Si, sur Ω, l'opération d'adjonction a la période p, il existe, dans le voisinage du point A, un élément de surface tangent au plan $\mathrm{A}a$, sur lequel les domaines d'ordre 1, 2, ..., $p-2$ de A sont formés de points unis de I_p et un élément de courbe tangent à la droite AA', sur lequel se trouvent $p-2$ points unis de I_p, infiniment voisins successifs de A.

On peut construire des exemples de ces deux cas pour $p=5$. Il suffit de considérer, dans un espace à quatre dimensions, les hypersurfaces du cinquième ordre invariantes pour une homographie de période 5, ayant comme axes deux droites et un point. Le second cas se présente aussi effectivement pour $p=3$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les systèmes d'équations linéaires à infinité d'inconnues.* Note de M. **M. Eidelheit**, présentée par M. Elie Cartan.

Nous allons donner ici quelques nouveaux résultats sur les systèmes d'équations

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k = \eta_i \qquad (i=1, 2, \ldots)$$

qui se rattachent au principe des réduites (¹).

Désignons par $D^{(m)}_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ le déterminant correspondant aux m premières lignes et aux colonnes d'indices $k_1, k_2, \ldots, k_m$ du tableau infini (a_{ik}).

Théorème I. — *Supposons que* $D^{(m)}_{1,2,\ldots,m} \neq 0$ $(m=1, 2, \ldots)$ *et que chacune des suites* $\{a_{1k}\}, \{a_{2k}\}, \ldots$ *soit bornée, et désignons par* $\{\xi^{(m)}_k\}$ *la suite qui satisfait aux m premières équations du système* (1) *et telle que* $\xi^{(m)}_k = 0$ *pour* $k > m$. *Pour que pour toute suite* $\{\eta_i\}$ *admettant une solution* $\{\xi_k\}$ *du système* (1) *telle que* $\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k| < \infty$, *il existe les limites* $\lim_{m\to\infty}\xi^{(m)}_k$ $(k=1, 2, \ldots)$,

(¹) Cf. F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à infinités d'inconnues*, Paris, 1913, p. 2.