COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les points unis des involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(*Première communication*)

Considérons une variété algébrique V, à trois dimensions, contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Soient A un de ces points unis, α l'espace linéaire à trois dimensions tangent en A à la variété V. Dans la gerbe de droites de sommet A, dans l'espace α, gerbe constituée par les tangentes à V en A, la transformation birationnelle T de V en soi, génératrice de l'involution I_p, détermine une homographie h. Celle-ci peut être l'identité, une homologie ou une homographie non homologique ; cela conduit à une classification des points unis. Nous appellerons :

Point uni de première espèce, un point uni tel que l'homographie h détermine l'identité dans la gerbe de sommet A ;

Point uni de seconde espèce, un point uni tel que l'homographie h détermine une homologie dans la gerbe de sommet A ;

Point uni de troisième espèce, un point uni tel que l'homographie h détermine une homographie non homologique dans la gerbe de sommet A.

Nous nous proposons d'étudier la structure de ces points unis en utilisant les résultats que nous avons récemment obtenus dans l'étude des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique [1]. Dans cette première communication, nous étudierons les points unis de première espèce et les points de diramation correspondants sur la variété image de l'involution. Nous retrouvons, sous une forme générale, certains résultats que nous avons déjà obtenus dans certains cas particuliers.

1. Soit V une variété algébrique à trois dimensions contenant une involution I_p, cyclique, d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Désignons par T la transformation birationnelle de V en soi, génératrice de l'involution.

Fixons sur V un système linéaire $|H|$ de surfaces, simple, dépourvu de points-base. Appliquons à $|H|$ les transformations $T, T^2, \dots, T^{p-1}$; nous obtenons $p-1$ systèmes linéaires $|H_1|, |H_2|, \dots, |H_{p-1}|$, qui peuvent d'ailleurs coïncider avec $|H|$ si ce système est transformé en lui-même par T. Formons ensuite le système linéaire complet.

$$|F| = |H + H_1 + H_2 + \dots + H_{p-1}|.$$

Le système linéaire $|F|$ est transformé en lui-même par T et contient un système linéaire partiel, dépourvu de points-base, appartenant à l'involution I_p.

Sur le système linéaire $|F|$, considéré comme ensemble de ses surfaces, la transformation T agit comme une homographie sur un espace linéaire. Il en résulte que l'on peut supposer que $|F|$ contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p. S'il n'en était pas

[1] *Recherches sur les points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1948.)

ainsi, il suffirait de remplacer $|F|$ par un de ses multiples $|\lambda F|$, λ étant un entier positif suffisamment grand. Observons de plus que $|H|$ ayant été supposé simple, $|F|$ est également simple.

Rapportons projectivement les surfaces F aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions, r étant la dimension de $|F|$. A V correspond point par point une variété normale que nous désignerons toujours par V, sur laquelle la transformation T est déterminée par une homographie H de période p de S_r, possédant p axes ponctuels $S^{(0)}, S^{(1)}, \ldots, S^{(p-1)}$.

Les systèmes linéaires partiels compris dans $|F|$, appartenant à l'involution I_p, sont découpés par les hyperplans passant par $p-1$ des axes ponctuels de l'homographie H. Nous désignerons pas Σ_i le système formé par les hyperplans passant par les axes $S^{(0)}$, $S^{(1)}, \ldots, S^{(i-1)}, S^{(i+1)}, \ldots, S^{(p-1)}$, par $|F_i|$ le système découpé sur V par ces hyperplans.

L'un des systèmes $|F_0|, |F_1|, \ldots, |F_{p-1}|$ est dépourvu de points base ; nous supposerons que c'est le système $|F_0|$. Il en résulte que V ne rencontre pas les axes $S^{(1)}$, $S^{(2)}, \ldots, S^{(p-1)}$ et que les points unis de I_p sont donc situés sur l'axe $S^{(0)}$.

Soient A un point uni de I_p, α l'espace tangent V en A. Nous nous placerons dans le cas général où α ne rencontre l'axe $S^{(0)}$ qu'au point A. L'espace α est uni pour l'homographie H et celle-ci détermine dans α une homographie h dont A est un point uni isolé. Trois hypothèses peuvent être faites :

L'espace α rencontre l'un des axes $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots$, suivant un plan ; h est alors une homologie générale de centre A et ce point est uni de première espèce.

L'espace α rencontre un des axes $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(p-1)}$ suivant un point et un autre suivant une droite ; h est une homographie axiale et A est un point uni de seconde espèce.

L'espace α rencontre trois des axes $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ..., $S^{(p-1)}$ chacun en un point. Le point A est alors un point uni de troisième espèce.

On remarquera que si $p = 2$, un point uni est toujours de première espèce. Si $p = 3$, un point uni est toujours de première ou de seconde espèce. On ne rencontrera donc des points unis de troisième espèce que si $p \geqslant 5$.

2. L'homographie H étant cyclique, est générale et ses axes ponctuels n'ont deux à deux aucun point commun ; ils déterminent complètement l'espace S_r.

Désignons par $r_0, r_1, \ldots, r_{p-1}$ les dimensions de ces axes. Prenons, dans $S^{(0)}$, $r_0 + 1$ points indépendants, dans $S^{(1)}$, $r_1 + 1$ points indépendants, ..., dans S^{p-1}, $r_{p-1} + 1$ points indépendants. Ces

$$r_0 + r_1 + \ldots + r_{p-1} + p = r + 1$$

points peuvent être pris pour sommets de la figure de référence dans l'espace S_r. Dans ces conditions, les équations de l'homographie H peuvent s'écrire

$$\rho y_i^{(k)} = \rho_k x_i^{(k)}, \ (i = 0, 1, \ldots, r_k \ ; \ k = 0, 1, \ldots, p - 1),$$

où $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{p-1}$ sont des racines d'ordre p_1, distinctes, de l'unité. Si ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité, on veut toujours numéroter les axes de l'homographie H de manière à avoir

$$\rho_0 = 1, \ \rho_1 = \epsilon, \ \ldots, \ \rho_k = \epsilon^k, \ \ldots, \ \rho_{p-1} = \epsilon^{p-1}.$$

Il en résulte qu'à chaque axe ponctuel $S^{(k)}$ de l'homographie H, est attachée une racine ϵ^k de l'unité.

3. Projetons la variété V à partir des espaces $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ..., $S^{(p-1)}$ sur l'espace $S^{(0)}$. A tout groupe de l'involution I_p correspond un point de $S^{(0)}$. Le lieu de ce point est une variété Ω, à trois dimensions, image de l'involution I_p. Cette variété est normale et ses sections hyperplanes Φ_0 correspondent aux surfaces F_0.

Aux points unis de l'involution I_p correspondent sur Ω les points de diramation de cette variété, points qui occupent dans l'espace $S^{(0)}$ la même position que les points unis de I_p sur V.

Les surfaces $F_1, F_2, \ldots, F_{p-1}$ passent par les points unis de l'involution I_p. Aux systèmes linéaires $|F_1|$, $|F_2|, \ldots, |F_{p-1}|$ correspondent sur Ω des systèmes linéaires complets $|\Phi_1|, |\Phi_2|, \ldots, |\Phi_{p-1}|$, de dimensions respectives $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$. Les surfaces $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{p-1}$ passent par les points de diramation de Ω.

On observera qu'en remplaçant $|F|$ par $|\lambda F|$, λ étant un entier positif suffisamment élevé, on peut supposer r et r_0 aussi grands qu'on le veut.

4. Supposons que A soit un point uni de première espèce. L'espace tangent α à V en A rencontre suivant un plan l'un des espaces $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(p-1)}$, par exemple l'espace $S^{(k)}$. Moyennant un simple changement de notation, on peut d'ailleurs supposer $k=1$ (il suffit de remplacer ϵ par ϵ^k et de changer la numérotation des axes). Nous supposerons donc que α rencontre suivant un plan l'espace $S^{(1)}$.

Les hyperplans de Σ_1, qui ne contiennent pas $S^{(1)}$, coupent α suivant un plan et par conséquent les surfaces F_1 ont un point simple en A. Sur une surface F_1, l'involution I_p détermine une involution d'ordre p pour laquelle A est un point uni parfait, puisque toutes les tangentes en A à cette surface sont unies pour l'homographie H.

Les surfaces F découpent, sur une surface F_1, un système linéaire $|(F, F_1)|$ qui contient p systèmes linéaires appartenant à l'involution I_p, à savoir les systèmes $|(F_0, F_1)|, |(F_1, F_1)|, \ldots, |(F_{p-1}, F_1)|$. Les courbes du premier de ces systèmes ne passent pas par A, mais nous avons démontré que les courbes (F_1, F_2), (F_2, F_1),

..., (F_{p-1}, F_1) ont en A les multiplicités 1, 2,..., p — 1, dans un certain ordre (1).

D'une manière précise, les courbes (F_1, F_1) passent simplement par A et par conséquent les courbes (F_{p-1}, F_1) ont la multiplicité $p - 1$ en A, car les courbes $(F_1, F_1) + (F_{p-1}, F_1)$ doivent avoir la multiplicité p en A.

En modifiant éventuellement la numérotation des axes de l'homographie H, nous supposerons que les courbes (F_i, F_1) ont la multiplicité i au point A. On en conclut que *les surfaces* F_i *ont en* A *un point multiple d'ordre* i.

De plus, les courbes (F_0, F_1) passant par le point A acquièrent la multiplicité p en ce point, donc *les surfaces* F_0 *passant par* A *ont ce point multiple d'ordre* p.

5. Envisageons maintenant la singularité du point de diramation A pour la variété Ω.

Deux surfaces F_0 ont p^2 tangentes en commun au point uni A, donc deux sections hyperplanes Φ_0 de Ω ont p^2 tangentes en commun au point de diramation A, car un point infiniment voisin de A sur V, compté p fois, forme un groupe de l'involution I_p. Il en résulte que A est multiple d'ordre p^2 pour Ω. Nous désignerons par ω le cône tangent en A à la variété Ω.

Considérons une surface F_1 de V et la surface Φ_1 qui lui correspond sur Ω. Comme nous l'avons observé, les groupes de I_p appartenant à la surface F_1 forment sur celle-ci une involution cyclique pour laquelle A est un point uni parfait. Il en résulte que le point A est multiple d'ordre p pour la surface Φ_1, le cône tangent à cette surface en ce point étant rationnel et irréductible (2). Appelons ω_1 ce cône. Lorsque la surface F_1

(1) *Sur les points unis parfaits des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Bull. de la Soc. des Sc. de Liège, 1937, pp. 37-40).

(2) *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique* (Bull. de la Soc. Math. de France,

varie dans $|F_1|$, la surface Φ_1 varie dans $|\Phi_1|$ et le cône ω_1 varie. D'autre part, une courbe (F_1, F_1) a en général un point simple en A et par conséquent deux cônes ω_1 se rencontrent suivant une seule droite. Il en résulte que si nous coupons le cône ω par un hyperplan ξ ne passant pas par A, la section est une surface (ω, ξ) contenant des courbes d'ordre p, (ω_1, ξ), formant un système homaloïdal. Par conséquent la surface (ω, ξ) représente les courbes d'ordre p appartenant à un plan σ et sur cette surface, les courbes (ω_1, ξ) forment un réseau homaloïdal et représentent les droites du plan. On observera d'ailleurs que la surface (ω, ξ) n'est pas nécessairement normale.

En un point de diramation correspondant à un point uni de première espèce, la variété image d'une involution cyclique d'ordre p *appartenant à une variété algébrique à trois dimensions, possède un point multiple d'ordre* p^2. *Les sections hyperplanes du cône tangent sont des surfaces représentant les courbes d'ordre* p *d'un plan, ou des projections de ces surfaces.*

6. Comme nous l'avons vu, une surface F_2 possède un point double au point uni A. La surface Φ_2 qui lui correspond sur Ω possède, au point de diramation A, un point multiple, le cône tangent rencontrant le cône tangent au point A à une surface Φ_1 suivant deux droites. Ce cône projette donc, de A, une courbe qui représente, sur la surface (ω, ξ), une courbe correspondant à une conique du plan σ. Les surfaces Φ_1 ont donc, en A, un point multiple d'ordre $2p$.

De même, les surfaces Φ_i ont en A, un point multiple d'ordre ip.

Liège, le 15 avril 1948.

1919. pp. 1-16) ; *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).