RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.
Estratto dal vol. XX, serie 6ª, 2° sem., fasc. 3-4 - Roma, agosto 1934-XII.

Matematica (Geometria). — *Sur les surfaces de genres un possédant une involution de bigenre un.* Nota [1] di L. GODEAUX, presentata dal Socio F. ENRIQUES.

M. Enriques a démontré que toute surface de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0, P_2 = 1$) représentait une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), birationnellement équivalente à une quadrique double [2]. D'autre part, il a montré qu'une surfaces de genres zéro et de bigenre un possède un groupe discontinu, infini, de transformations birationnelles en elle-même [3]. La raison intime en est l'existence, sur la surface, de courbes fixes découpant, sur les courbes elliptiques d'un faisceau, des couples de points non équivalents. On peut se demander si une surface de genres un, possédant une involution d'ordre deux et de bigenre un, possède également un groupe discontinu infini de transformations birationnelles en elle-même. La réponse est affirmative et cela provient de l'existence, sur la surface de genres un, de faisceaux de courbes elliptiques bisécantes.

D'une manière précise, nous démontrons le théorème suivant:

Si une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) *possède une involution d'ordre deux et de genres zéro, bigenre un* ($p_a = P_3 = 0, P_2 = 1$), *elle est transformée en elle-même par les trasformations birationnelles d'un groupe infini discontinu.*

1. Soit F une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) contenant une involution I_2 d'ordre deux, de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0, P_2 = 1$). Désignons par Φ une surface image de l'involution I_2. Considérons, sur Φ, deux courbes elliptiques isolées, irréductibles, Γ_1, Γ_2, mutuellement adjointes et par suite ne se rencontrant pas. On a

$$2\Gamma_1 \equiv 2\Gamma_2,$$

et les courbes $2\Gamma_1, 2\Gamma_2$ appartiennent à un faisceau linéaire de courbes elliptiques $|\Gamma|$.

Désignons respectivement par $C_1, C_2, \bar{C}$ les courbes qui correspondent sur F aux courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$. L'involution I_2 étant dépourvue de points

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1934.

(2) F. ENRIQUES, *Un'osservazione relativa alle superficie di bigenere uno.* («Rend. R. Accad. Bologna», 13 gennaio 1908). Voir aussi notre Note: *Sur un théorème de M. Enriques concernant les surfaces de bigenre un.* («Bull. Soc. Roy. de Liége», 1933, pp. 154-156).

(3) F. ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno.* («Memorie R. Soc. ital. Scienze (dei XL)», 1906, ser. 3ª, to. XIV, pp. 327-352). Voir aussi G. FANO, *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari.* («Rend. Circolo Matem. Palermo», 1910, to. XXIX, pp. 98-118).

unis, les courbes C_1, C_2, $\bar{C}$ sont elliptiques. Les courbes $\bar{C}$ forment sur F un faisceau linéaire de courbes elliptiques qui comprend, au moins comme parties, les courbes C_1, C_2.

Supposons les courbes $\bar{C}$ irréductibles; chacune d'elles est transformée en elle-même par I_2. Si l'on désigne par D la courbe qui, avec C_1, forme une courbe $\bar{C}$, et par Δ la courbe qui lui correspond sur Φ, on a $\Gamma \equiv \Gamma_1 + \Delta$ et, puisque $\Gamma \equiv 2\,\Gamma_1$, on aura $\Delta \equiv \Gamma_1$. Par suite, la courbe C_1, comptée deux fois, forme une courbe $\bar{C}$. Pour la même raison, la courbe C_2, comptée deux fois, forme une courbe $\bar{C}$ et on a

$$2\,C_1 \equiv 2\,C_2.$$

Mais la division, sur une surface de genres un, est une opération univoque (1), donc on a $C_1 \equiv C_2$. On en déduit que les courbes C_1, C_2 appartiennent à un faisceau $|C|$ de courbes elliptiques. Les faisceaux $|\bar{C}|$, $|C|$ sont de degré zéro et une courbe $\bar{C}$ ne rencontre pas en général une courbe C; on en conclut que chaque courbe $\bar{C}$ est composée de deux courbes C, contrairement à l'hypothèse d'irréductibilité des courbes $\bar{C}$.

Les courbes $\bar{C}$ doivent donc être composées de deux parties, conjuguées par rapport à I_2 et formant nécessairement un faisceau $|C|$. Ce faisceau contient deux courbes qui sont leurs propres conjuguées par rapport à I_2, ce sont les courbes C_1, C_2.

On observera que les courbes Γ_1, Γ_2, Γ sont en général irréductibles, par suite les courbes C_1, C_2, C sont en général irréductibles.

2. On peut toujours trouver, sur la surface Φ, trois faisceaux de courbes elliptiques $|\Gamma|$, $|\Gamma'|$, $|\Gamma''|$ contenant chacun deux courbes réduites à des composantes doubles, tels qu'une courbe d'un des faisceaux rencontre toute courbe d'un autre faisceau en quatre points. Si l'on prend par exemple pour modèle projectif de Φ la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre (ce qui ne restreint pas la généralité), il suffit de considérer les faisceaux découpés sur cette surface par les quadriques passant par quatre des arêtes du tétraèdre formant un quadrilatère gauche.

Aux faisceaux $|\Gamma|$, $|\Gamma'|$, $|\Gamma''|$ correspondent, sur F, des faisceaux de courbes elliptiques $|C|$, $|C'|$, $|C''|$. Aux quatre points communs à une courbe Γ et à une courbe Γ' correspondent sur F huit points suivant lesquels deux courbes C rencontrent deux courbes C'. Par suite les courbes C rencontrent les courbes C' en deux points. De même, les courbes C'' rencontrent les courbes C, C' en deux points.

Cela étant, considérons deux courbes C', C'' déterminées. Elle ne peuvent decouper sur les courbes de $|C|$ des couples de points équivalents, car alors,

(1) F. Severi, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique.* (« Annales Ecole norm. sup. », 1908, pp. 449-468).

d'après un théorème de M. Severi [1], elles seraient équivalents, ce qui est impossible, ou bien, ajoutées à des composantes de courbes réductibles du faisceau $|C|$, elles donneraient des courbes équivalentes; mais cela est également impossible, puisque le faisceau $|C|$ ne contient pas en général de courbes réductibles. Pour la même raison, les multiples des couples de points envisagés ne peuvent être équivalents.

Il suffit maintenant de reprendre le raisonnement de M. Enriques. Désignons par z l'intégrale elliptique de première espèce attachée à la courbe C générale, par A′ la somme de ses valeurs aux points de rencontre de C avec C′, par A″ la somme analogue relative à C″. On aura une transformation birationnelle

$$z' \equiv z + A' - A'' \qquad \text{(mod. périodes)},$$

définie rationnellement sur chaque courbe C. Et cette transformation birationnelle ne peut être cyclique.

En intervertissant les rôles des courbes C, C′, C″, et en partant des autres faisceaux de courbes elliptiques existant sur Φ, on définira un groupe infini discontinu de transformations birationnelles de F en elle-même. Ainsi se trouve démontré le théorème énoncé au début.

(1) F. Severi, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche.* (« Annali di Matematica », 1906, ser. 3ª, to XII, pp. 55–79).

Roma, 1934-XII. — Dott. G. Bardi, Tip. della R. Accademia dei Lincei