# *Sur les systèmes invariants de certaines surfaces algébriques;*

Par Lucien **GODEAUX**.

(Liège.)

Considérons deux surfaces algébriques F, F′ liées par une correspondance birationnelle. Il peut exister, sur chacune de ces surfaces, des points simples isolés dont les homologues sont indéterminés. Si P′ est un point de cette nature sur la surface F′, son homologue P sur F varie sur une courbe $\gamma$ appelée courbe exceptionnelle. La théorie de ces courbes a été faite par F. Enriques dans ses premières recherches sur les surfaces algébriques (¹). Une courbe exceptionnelle est rationnelle et de degré virtuel $-1$; elle n'est pas rencontrée par les courbes canoniques de la surface. On peut se demander si une courbe rationnelle de degré virtuel $-1$ tracée sur une surface algébrique est nécessairement exceptionnelle. La réponse est négative et l'objet de ce travail est précisément de construire une surface contenant une courbe rationnelle de degré virtuel $-1$ qui n'est pas exceptionnelle et qui intervient comme composante du système canonique et des systèmes pluricanoniques de la surface. Nous avons obtenu cette surface comme image d'une involution cyclique, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique, en application de la théorie de ces involutions que nous avons construite antérieurement (²).

---

(¹) *Voir*, par exemple, F. Enriques, *Le superficie algebriche*, Zanichelli Bologna, 1949.

(²) *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Académie royale

Nous considérons une surface F d'ordre $3\nu+2$ transformée en soi par une homographie de période $p=9\nu^2+3\nu+1$, où nous supposons $\nu$ choisi de telle sorte que $p$ soit premier. Cette homographie engendre sur F une involution possédant trois points unis. Nous construisons un modèle projectif normal $\Phi$ de cette involution. La détermination des singularités des trois points de diramation de la surface $\Phi$ (homologues des trois points unis de l'involution) se fait en appliquant la méthode que nous avons exposée dans nos travaux cités plus haut; nous l'indiquons rapidement. Nous construisons alors les systèmes canonique et bicanonique de la surface $\Phi$ et montrons qu'une certaine courbe rationnelle de degré virtuel $-1$ appartient à ces systèmes. Nous avons cependant fait ces développements en supposant $\nu=2$; le cas $\nu>2$ se traite exactement de la même manière, mais donne lieu à des calculs plus longs.

**1.** Considérons la surface F d'équation

$$a_1 x_1^{3\nu+1} x_2 + a_2 x_2^{3\nu+1} x_3 + a_3 x_3^{3\nu+1} x_1 + \sum_{i=0}^{\nu} a_{4+i} (x_1 x_2 x_3)^i x_4^{3\nu+2-3i} = 0,$$

où $\nu$ est un entier tel que $p=9\nu^2+3\nu+1$ soit premier.

La surface F est transformée en soi par l'homographie

$$H = \begin{pmatrix} x_1 & \varepsilon x_2 & \varepsilon^{9\nu^2+1} x_3 & \varepsilon^{6\nu^2+\nu+1} x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

où $\varepsilon$ est une racine primitive d'ordre $p$ de l'unité. L'homographie H a la période $p$ et engendre sur F une involution I ayant trois points unis $O_1(1, 0, 0, 0)$, $O_2(0, 1, 0, 0)$, $O_3(0, 0, 1, 0)$.

Pour construire un modèle projectif de la surface $\Phi$ image de

---

de Belgique, 1952); *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples*, Colloque de Géométrie algébrique du Centre Belges de Recherches mathématiques, Liège (Masson, Paris et Thone, Liège, 1952); *La théorie des involutions cycliques appartenant à une surfaces algébrique et ses applications* (Colloque « Henri Poincaré », Paris, octobre 1954); *Sulle involuzioni cicliche appartenenti ad una superficie algebrica* (Rendiconti del Seminario matematico e fisico di Milano, 1953-1954).

l'involution I, observons qu'à une section plane D de F correspond sur $\Phi$ une courbe $\Gamma$ de genre égal à celui, $\frac{3}{2}\nu(3\nu+1)$ de D, possédant $\frac{3}{2}\nu(3\nu+2)(3\nu+3)$ points doubles. Ceux-ci correspondent aux couples de points de D appartenant à un même groupe de I. A la courbe $\Gamma$ correspond sur F l'ensemble de la courbe D et de ses $p-1$ transformées par H, $H^2$, .... Lorsque la courbe D varie sur F, $\Gamma$ varie dans un système rationnel dont les courbes appartiennent totalement à un système linéaire $|\Gamma|$, de genre $\frac{9}{2}\nu(\nu+1)(3\nu+1)$ et de degré $(3\nu+2)p$. Aux courbes de $|\Gamma|$ correspondent sur F les courbes $C \equiv pD$, découpées sur F par les surfaces d'ordre $p$ du système linéaire transformé en soi par H et qui ne passent pas par les points unis de H (on défalque de ce système les surfaces qui contiennent F comme partie). On voit aisément que la dimension $r$ de $|C|$ et, par suite, de $|\Gamma|$ est supérieure à 3.

Rapportons projectivement les courbes $\Gamma$ aux hyperplans d'un espace linéaire $S_r$ à $r$ dimensions; nous obtenons un modèle projectif de $\Phi$ sur lequel, aux points unis $O_1$, $O_2$, $O_3$ de I correspondent des points de diramation isolés $O'_1$, $O'_2$, $O'_3$.

Considérons le cas $\nu=2$. L'équation de la surface F, d'ordre 8, est alors

$$a_1 x_1^7 x_2 + a_2 x_2^7 x_3 + a_3 x_3^7 x_1 + a_4 x_4^8 + a_5 x_1 x_2 x_3 x_4^5 + a_6 (x_1 x_2 x_3)^2 x_4^2 = 0$$

et l'homographie H,

$$H = (x_1 \quad \varepsilon x_2 \quad \varepsilon^{37} x_3 \quad \varepsilon^{27} x_4).$$

L'involution I est d'ordre $p=43$.

Le modèle projectif de la surface $\Phi$, dans $S_r$, est une surface d'ordre 344, à sections hyperplanes $\Gamma$ de genre 189. Un calcul simple montre que l'on a $r=158$.

**2.** Il faut en premier lieu étudier la structure des points unis de l'involution et celle des points de diramation. Remarquons d'ailleurs qu'il suffira d'étudier les structures des points $O_1$, $O'_1$, à cause de la symétrie de l'équation de F en $x_1$, $x_2$, $x_3$.

La structure du point uni $O_1$ et celle du point de diramation $O'_1$ se déterminent par les procédés que nous avons développés dans notre *Mémoire sur les surfaces multiples* cité plus haut; cette recherche ne présentant aucune difficulté, nous nous contenterons de la résumer.

Observons tout d'abord que le point $O_1$ est simple pour F, le plan tangent en ce point étant $x_2 = 0$. Dans ce plan, l'homographie H détermine une homographie que l'on peut écrire

$$H = (x_1 \quad \zeta x_3 \quad \zeta^{17} x_4),$$

en posant $\zeta = \varepsilon^{37}$, ou

$$H = (x_1 \quad \eta^{38} x_3 \quad \eta x_4),$$

en posant $\eta = \varepsilon^{27}$. Les nombres attachés au point $O_1$ sont donc $\alpha = 17$, $\beta = 38$.

Appelons C′ les courbes C passant par $O_1$; elles y ont des tangentes fixes confondues avec $O_1O_3$, $O_1O_4$. Appelons ensuite C″ les courbes C′ assujetties à toucher en $O_1$ une droite distincte des précédentes; elles y ont aussi ces mêmes droites comme tangentes fixes. Et ainsi de suite jusqu'au moment où nous arriverons à des courbes ayant la multiplicité 43 en $O_1$ et des tangentes variables en ce point. Désignons par Γ′, Γ″, ... les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C′, C″, ..., par $\Phi_1$, $\Phi_2$, ... les surfaces, projections de Φ à partir d'espaces qui seront déterminés, dont les sections hyperplanes sont respectivement les courbes Γ′, Γ″, ....

Rappelons que nous disons qu'un point uni A de F est uni de première espèce pour l'involution I lorsque, dans le plan tangent à la surface en ce point, H détermine une homologie de centre A, de seconde espèce dans le cas opposé. Ces définitions s'étendent, comme nous l'avons montré, aux points fictifs, infiniment voisins successifs d'un point proprement dit.

Cela rappelé, il existe deux suites de points unis infiniment voisins successifs de $O_1$. La première de ces suites comprend 16 points que nous désignerons par (α, 1), (α, 2), ..., (α, 16); la seconde comprend 37 points que nous désignerons par (β, 1), (β, 2), ..., (β, 37). Le point (α, 1) appartient à la droite $O_1O_3$ et le point (β, 1) à la droite $O_1O_4$. Tous ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution, sauf les points (α, 16), (β, 37) qui sont unis de première espèce.

Au point $(\alpha, i)(i < 16)$, sont infiniment voisins deux points unis : l'un est $(\alpha, i+1)$, l'autre sera désigné par $(\alpha, i, 1)$. Si ce dernier point est uni de seconde espèce, les points unis qui lui sont infiniment voisins seront désignés par $(\alpha, i, 2)$ et $(\alpha, i, 1, 1)$. Et ainsi de suite. On utilisera des notations analogues pour les points $(\beta, 1), \ldots, (\beta, 36)$.

3. Cela étant, on établit par les méthodes de notre Mémoire cité que les courbes $C'$ passent six fois par $O_1$, cinq fois par $(\alpha, 1)$, quatre fois par $(\alpha, 2)$, deux fois par $(\alpha, 3), \ldots, (\alpha, 16)$, une fois par les points $(\alpha, 2, 1)$, $(\alpha, 2, 1, 1)$, une fois par les points $(\beta, 1), \ldots, (\beta, 37)$.

Sur la surface $\Phi_1$ il correspond au domaine du point $(\alpha, 16)$ une conique $\sigma_\alpha$, à celui de $(\alpha, 2, 1, 1)$, uni de première espèce, une droite $\tau_\alpha$ rencontrant $\sigma_\alpha$ en un point, au domaine de $(\beta, 37)$ une droite $\sigma_\beta$ rencontrant $\tau_\alpha$ en un point $O'_{11}$. La surface $\Phi_1$ est d'ordre 340; elle est la projection de $\Phi$ à partir de $O'_1$ sur un hyperplan de l'espace ambiant. Le cône tangent à $\Phi$ au point $O'_1$ est la projection à partir de ce point de la courbe $\sigma_\alpha + \tau_\alpha + \sigma_\beta$; le point $O'_1$ est donc quadruple pour la surface $\Phi$.

Les courbes $C''$ ont la multiplicité 11 en $O_1$; elles passent deux fois par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 16)$, trois fois par $(\beta, 1)$, deux fois par $(\beta, 2), (\beta, 3), \ldots, (\beta, 15)$, une fois par $(\beta, 16)$, par un point $(\beta, 16, 1)$ infiniment voisin du précédent, une fois par une suite de points $(\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 6)$ infiniment voisins successifs de $(\beta, 1)$. Les points $(\beta, 16, 1)$, $(\beta, 1, 6)$ sont unis de première espèce.

ruS la surface $\Phi_2$, il correspond aux domaines des points $(\alpha, 16)$, $(\beta, 1, 6)$, $(\beta, 16, 1)$, respectivement la conique $\sigma_\alpha$, une droite $\rho_1$ rencontrant $\sigma_\alpha$ en un point $O'_{12}$ et une droite $\rho_6$ rencontrant $\rho_1$ en un point. La surface $\Phi_2$ est la projection de $\Phi_1$ à partir du point $O'_{11}$ et ce point est double biplanaire pour $\Phi_1$. La surface $\Phi_2$ est d'ordre 338.

Les courbes $C'''$ passent douze fois par $O_1$, dix fois par $(\alpha, 1)$, sept fois par $(\alpha, 2)$, une fois par $(\alpha, 3), \ldots, (\alpha, 16)$, trois fois par $(\alpha, 2, 1)$, $(\alpha, 2, 1, 1)$, deux fois par $(\beta, 1), \ldots, (\beta, 15)$, une fois par $(\beta, 16)$, $(\beta, 16, 1)$.

Sur la surface $\Phi_3$, d'ordre 335, il correspond aux domaines des points $(\alpha, 16)$, $(\alpha, 2, 1, 1)$, $(\beta, 16, 1)$ respectivement une droite $\sigma_\alpha$, une cubique gauche $\tau_\alpha$ rencontrant $\sigma_\alpha$ en un point, une droite $\rho_6$

rencontrant $\tau_\alpha$ en un point $O'_{13}$. $\Phi_3$ est la projection de $\Phi_2$ à partir de $O'_{12}$ et ce point est triple pour cette dernière surface.

Les courbes $C^{(4)}$ passent dix-sept fois par $O_1$, sept fois par $(\alpha, 1)$, cinq fois par $(\alpha, 2)$, une fois par $(\alpha, 3)$, ..., $(\alpha, 16)$, deux fois par $(\alpha, 2, 1)$, $(\alpha, 2, 1, 1)$, quatre fois par $(\beta, 1)$, trois fois par $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, 8)$, une fois par $(\beta, 9)$, $(\beta, 9, 1)$, $(\beta, 9, 2)$, une fois par $(\beta, 1, 1)$, ..., $(\beta, 1, 6)$.

Sur la surface $\Phi_4$, d'ordre 333, sont tracées une droite $\sigma_\alpha$, une conique $\tau_\alpha$ rencontrant $\sigma_\alpha$ en un point, une droite $\rho_1$ s'appuyant sur $\tau_\alpha$ en un point $O'_{14}$, une droite $\rho_5$, homologue du domaine du point $(\beta, 9\ 2)$, rencontrant $\rho_1$ en un point. La surface $\Phi_4$ est la projection de $\Phi_3$ à partir du point $O'_{13}$, qui est double pour cette surface.

L'examen des courbes $C^{(5)}$, ... et des courbes tracées sur les surfaces $\Phi_5$, ... se poursuit sans difficulté. Bornons-nous à indiquer qu'on trouve encore les points unis de première espèce $(\beta, 5, 1, 2)$, $(\beta, 3, 1; 1, 1)$, $(\beta, 2, 5)$ qui donnent lieu à des droites $\rho_4$, $\rho_3$, $\rho_2$ et les points unis de première espèce $(\alpha, 1, 2, 1, 3)$, $(\alpha, 1, 6, 2)$, $(\alpha, 13, 1)$, $(\alpha, 1, 34)$, dont les domaines sont représentés sur $\Phi$ par des droites exceptionnelles.

Il en résulte que le point $O'_1$ de $\Phi$ est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble de neuf courbes rationnelles

$$\sigma_\alpha, \quad \tau_\alpha, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \rho_3, \quad \rho_4, \quad \rho_5, \quad \rho_6, \quad \sigma_\beta,$$

chacune de ces courbes rencontrant la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontrant pas les autres On a

$$\Gamma \equiv \Gamma' + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_6 + \sigma_\beta$$

et l'on en déduit que les courbes $\sigma_\alpha$, $\tau_\alpha$ sont de degré virtuel — 3, les autres de degré virtuel — 2.

Les points $O'_2$, $O'_3$ ont des structures analogues. Lorsque nous aurons à distinguer les courbes équivalentes aux points $O'_1$, $O'_2$, $O'_3$, nous désignerons respectivement ces courbes par $\sigma'_\alpha$, $\tau'_\alpha$, ..., $\sigma'_\beta$, $\sigma''_\alpha$, ..., $\sigma'''_\alpha$, ...

**4.** Les courbes canoniques de la surface $\Phi$ doivent, comme on sait, rencontrer en $n-2$ points une courbe rationnelle de degré virtuel $-n$, donc elles rencontrent en un point chacune des courbes $\sigma'_\alpha$, $\tau'_\alpha$, $\sigma''_\alpha$, $\tau''_\alpha$, $\sigma'''_\alpha$, $\tau'''_\alpha$.

Les courbes qui correspondent sur F à ces courbes canoniques sont des courbes canoniques de F passant une fois par les points $(\alpha, 16)$, $(\alpha, 2, 1, 1)$ du domaine de $O_1$. Par conséquent, ces courbes passent quatre fois par $O_1$, $(\alpha, 1)$, trois fois par $(\alpha, 2)$, une fois par $(\alpha, 3), \ldots,$ $(\alpha, 16)$, une fois par $(\alpha, 2, 1)$, $(\alpha, 2, 1, 1)$. Elles ont un comportement analogue en $O_2$, $O_3$. Observons que parmi ces courbes, se trouvent celles qui passent quatre fois par les points $O_1$, $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, $\ldots,$ $(\alpha, 16)$, et ayant le même comportement en $O_2$, $O_3$.

Sur la section de F par le plan $x_4 = 0$, le point $O_1$ est l'origine d'une branche linéaire, donc cette courbe passe nécessairement par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 16)$ et a un comportement analogue en $O_2$, $O_3$. Il en résulte que parmi les transformées des courbes canoniques de $\Phi$ se trouve la courbe découpée sur F par le plan $x_4 = 0$ comptée quatre fois.

Observons maintenant que les courbes canoniques de F transformées des courbes canoniques de $\Phi$ sont découpées par des surfaces dont les équations, lorsqu'on applique H, se reproduisent multipliées par une même puissance de $\varepsilon$. Parmi ces surfaces se trouve $x_4^4 = 0$ et, par suite, cette puissance de $\varepsilon$ est 22.

Cela étant, un calcul simple montre que ces surfaces sont

$$x_4(x_1 x_2 x_3 + \lambda x_4^3) = 0.$$

On peut déjà en conclure que le genre géométrique de $\Phi$ est $p_g = 2$. De plus, F étant régulière, il en est de même de $\Phi$ et la dimension $r$ de $|\Gamma|$ est, d'après le théorème de Riemann-Roch, égale à 158 (comme on l'avait déjà remarqué).

5. Appelons $K_1$ la courbe section de F par le plan $x_4 = 0$ et $K'_1$ la courbe qui lui correspond sur $\Phi$.

La courbe $K'_1$ rencontre en un point chacune des courbes $\sigma'_\alpha$, $\sigma''_\alpha$, $\sigma'''_\alpha$ mais ne rencontre pas les autres composantes des points $O'_1$, $O'_2$, $O'_3$. D'autre part, $K_1$ comptée 43 fois, est une courbe de $|C|$ et, par conséquent, $K'_1$ appartient à un hyperplan qui a un contact d'ordre 42 avec $\Phi$ le long de cette courbe. Enfin, $K'_1$ est d'ordre 8. Il existe donc une relation fonctionnelle de la forme

$$\Gamma \equiv 43 K'_1 + \lambda\sigma'_\alpha + \lambda_0\tau'_\alpha + \lambda_1\rho'_1 + \ldots + \lambda_6\rho'_6 + \lambda_7\sigma'_\beta + \ldots,$$

les termes non écrits se rapportant aux points $O'_2$, $O'_3$ et les $\lambda$ étant des entiers.

En considérant les sections de $\Gamma$ par les courbes $\sigma'_\beta$, $\rho'_6$, ..., $\rho'_1$, $\tau'_\alpha$, on obtient

$$\lambda_6 = 2\lambda_7, \qquad \lambda_5 = 3\lambda_7, \qquad \lambda_4 = 4\lambda_7,$$
$$\lambda_3 = 5\lambda_7, \qquad \lambda_2 = 6\lambda_7, \qquad \lambda_1 = 7\lambda_7, \qquad \lambda_0 = 8\lambda_7, \qquad \lambda = 17\lambda_7.$$

puis, en coupant par $\sigma'_\alpha$,

$$43 - 3\lambda + \lambda_0 = 0.$$

On en déduit $\lambda_7 = 1$ et, en posant $\sum \sigma_\alpha = \sigma'_\alpha + \sigma''_\alpha + \sigma'''_\alpha, \ldots,$

$$(1) \qquad \Gamma \equiv 43 K'_1 + 17\sum\sigma_\alpha + \sum(8\tau_\alpha + 7\rho_1 + 6\rho_2 + 5\rho_3 + 4\rho_4 + 3\rho_5 + 2\rho_6 + \tau_\beta).$$

En coupant par $K'_1$ et en appelant $x$ le degré virtuel de cette courbe, on a

$$8 = 43x + 3.17, \qquad \text{d'où} \qquad x = -1.$$

L'application de la formule de Zeuthen montre, d'autre part, que $K'_1$ est rationnelle. On a donc une courbe rationnelle de degré virtuel $-1$.

**6.** Appelons maintenant $K_3$ les courbes découpées sur F par les surfaces

$$(1) \qquad x_1x_2x_3 + \lambda x_4^3 = 0$$

et $K'_3$ les courbes qui leur correspondent sur $\Phi$. D'après ce qu'on a vu, les courbes $K_3$ doivent passer simplement par le point $(\alpha, 2, 1, 1)$, Pour mettre ce point en évidence, nous allons utiliser les transformations quadratiques

$$T_1 = (x_1^2, x_2x_3, x_1x_3, x_3x_4), \qquad T_2 = (x_1^2, x_2x_4, x_3x_4, x_1x_4)$$

dont les inverses sont

$$T_1^{-1} = (x_1x_3, x_1x_2, x_3^2, x_1x_4), \qquad T_2^{-1} = (x_1x_4, x_1x_2, x_1x_3, x_4^2).$$

Appliquons à la surface F successivement les transformations $T_1^2$, $T_2$, $T_1$ ; nous obtenons la surface F′ d'équation

$$\begin{aligned} a_1 x_1^{63} x_2 + a_2 x_2^7 x_3^{38} x_4^{19} + a_3 x_1^{52} x_3^8 x_4^4 + a_4 x_4^9 x_3^{34} x_4^{21} \\ + a_5 x_1^{20} x_2 x_3^{27} x_4^{18} + a_6 x_1^{31} x_2^2 x_3^{20} x_4^{11} = 0. \end{aligned}$$

Les mêmes transformations font correspondre à la surface (1) la surface

$$(1') \qquad x_1^{11} x_2 + \lambda x_3^7 x_4^5 = 0.$$

Au point $(\alpha, 2, 1, 1)$ correspond sur F′ et (1′) le point (1, 0, 0, 0).

La courbe commune aux surfaces F′ et (1′) appartient également à la surface

$$x_1^{52}(a_1 \lambda x_4 + a_3 x_3) + a_2 x_2^7 x_3^{31} x_4^{15} + \ldots + a_6 x_1^{31} x_2^2 x_3^{13} x_4^7 = 0.$$

On en conclut que F′ et (1′) se rencontrent suivant une courbe ayant un point simple en (1, 0, 0, 0), la tangente étant

$$x_2 = 0, \qquad a_1 \lambda x_4 + a_3 x_3 = 0.$$

Observons qu'à l'homographie H correspond l'homographie

$$(x_1 \quad \varepsilon^{19} x_2 \quad \varepsilon^{41} x_3 \quad \varepsilon^{41} x_4)$$

qui donne lieu, dans le plan $x_2 = 0$, à une homologie de centre (1, 0, 0, 0), ce qui montre que le point $(\alpha, 2, 1, 1)$ est bien uni de première espèce.

Les courbes $K'_3$ rencontrent donc en un point chacune des courbes $\tau'_\alpha$, $\tau''_\alpha$, $\tau'''_\alpha$, mais ne rencontrent pas les autres composantes des points de diramation.

Les courbes $K_3$, comptées 43 fois, appartiennent au système $|3C$ et les courbes $K'_3$ sont d'ordre 24. On a donc une relation de la forme

$$3\Gamma \equiv 43 K'_3 + \lambda \sigma'_\alpha + \lambda_0 \tau'_\alpha + \lambda_1 \rho'_1 + \ldots + \lambda_6 \rho'_6 + \lambda_7 \sigma'_\beta + \ldots.$$

En opérant comme plus haut, on trouve

$$(\mathrm{II}) \qquad 3\Gamma \equiv 43 K'_3 + 8 \sum \sigma_\alpha + 24 \sum \tau_\alpha + 3 \sum X,$$

où nous posons

$$X' \equiv 7\rho'_1 + 6\rho'_2 + 5\rho'_3 + 4\rho'_4 + 3\rho'_5 + 2\rho'_6 + \sigma'_\beta, \qquad \ldots.$$

Le degré du faisceau $|K'_3|$ est o et le genre des courbes $K'_3$ est égal à l'unité ([3]).

La comparaison des équations (I) et (II) donne

$$K'_3 \equiv 3\,K'_1 + \sigma'_\alpha + \sigma''_\alpha + \sigma'''_\alpha.$$

**7.** Nous nous occuperons maintenant du système bicanonique de $\Phi$.

Les courbes qui correspondent sur F aux courbes bicanoniques de $\Phi$ sont des courbes bicanoniques de la première surface découpées par les surfaces du huitième ordre dont les équations, lorsqu'on applique H, se reproduisent multipliées par une même puissance de $\varepsilon$. Parmi ces surfaces se trouve la surface $x_4^8 = 0$, donc cette puissance de $\varepsilon$ est l'unité. Il en résulte que ces surfaces appartiennent au même système linéaire que F. Par conséquent, les courbes bicanoniques de F transformées des courbes bicanoniques de $\Phi$ sont découpées par les surfaces

$$\lambda_1 x_1^7 x_2 + \lambda_2 x_2^7 x_3 + \lambda_3 x_3^7 x_1 + \lambda_4 x_4^8 + \lambda_5 x_1 x_2 x_3 x_4^5 = 0. \tag{1}$$

Désignons ces courbes par $K_8$ et par $K'_8$ les courbes qui leur correspondent sur $\Phi$. Comme une courbes $K_8$, comptée 43 fois, appartient au système $|8C|$, on a sur $\Phi$ une relation fonctionnelle entre les courbes $8\Gamma$, $43K'_8$ et les composantes des points $O'_1$, $O'_2$, $O'_3$.

Nous allons voir que les courbes $K_8$ passent simplement par le point $(\beta, 1, 6)$. A cet effet, opérons une fois la transformation $T_2$, puis six fois la transformation $T_1$. A la surface F correspond une surface F′ d'équation

$$\begin{aligned} a_1 x_1^{92} x_2 + a_2 x_2^7 x_3^{79} x_4^7 + a_3 x_1^{50} x_3^{37} x_4^6 + a_4 x_1^{50} x_3^{36} x_4^7 \\ + a_5 x_1^{49} x_2 x_3^{37} x_4^6 + a_6 x_1^{48} x_2^2 x_3^{37} x_4^5 = 0 \end{aligned}$$

et à la surface (1), une surface d'équation

$$\lambda_1 x_1^{92} x_2 + \lambda_2 x_2^7 x_3^{79} x_4^7 + \ldots + \lambda_5 x_1^{49} x_2 x_3^{37} x_4^6 = 0.$$

Au point $(\beta, 1, 6)$ correspond le point $(1, 0, 0, 0)$ et la courbe

---

([3]) Pour évaluer le genre de la courbe $K'_1$, on peut considérer la courbe qui lui correspond dans la représentation plane de la surface (1). *Voir* notre Note : *Sur quelques surfaces représentant des involutions cycliques* (*Bull. Acad. roy. Belgique*, 1951, p. 819-825).

commune à ces deux surfaces a comme tangente en ce point

$$x_2 = 0, \qquad (a_3\lambda_1 - a_1\lambda_3)\,x_3 + (a_4\lambda_1 - a_1\lambda_4)\,x_4 = 0.$$

Cela étant, les courbes $K_8$ ont en $O_1$ une multiplicité au moins égale à 7. En comparant les équations de F et l'équation (1), on voit que cette multiplicité est égale à 7, les tangentes étant confondues avec $O_1 O_4$. On en conclut que les courbes $K'_8$ rencontrent la courbe $\rho'_1$ en un point, mais ne rencontrent pas les autres composantes de $O'_1$. Elles rencontrent de même $\rho''_1$, $\rho'''_1$ en un point. Par un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut, on voit qu'on a

$$\text{(III)} \qquad 8\Gamma \equiv 43K'_8 + 7\sum\sigma_\alpha + 21\sum\tau_\alpha + 8\sum X.$$

Les courbes $K'_8$ sont d'ordre 64. D'après la relation précédente, le système linéaire $|K'_8|$ a le degré 8. Observons d'ailleurs que les courbes $K_8$ ont le degré virtuel $8^3$ ; deux de ces courbes se rencontrent en 56 points confondus en chacun des points $O_1$, $O_2$, $O_3$ ; donc $|K_8|$ a le degré effectif $8.43$, ce qui confirme que le degré de $|K'_8|$ est 8.

Des relations (I), (II), (III), on tire

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} K'_8 \equiv 2(K'_1 + K'_3) + \sum\sigma_\alpha + \sum\tau_\alpha, \\ K'_8 \equiv 8K'_1 + 3\sum\sigma_\alpha + \sum\tau_\alpha. \end{cases}$$

**8.** Le système canonique de la surface $\Phi$ est

$$|L_1| = \left|K'_1 + K'_3 + \sum\sigma_\alpha + \sum\tau_\alpha\right|.$$

En effet, les courbes $K'_8$ font certainement partie des courbes bicanoniques. Celles-ci doivent former un système qui est le double du système canonique. Or, d'après la formule (IV), les courbes $K'_1$, $K'_3$, $\sigma_\alpha$, $\tau_\alpha$ font partie de courbes du système $|K'_8|$; elles doivent donc faire partie du système canonique.

Cela étant, le système bicanonique de $\Phi$ est

$$|L_2| = \left|2(K'_1 + K'_3) + 2\sum\sigma_\alpha + 2\sum\tau_\alpha\right| = \left|K'_8 + \sum\sigma_\alpha + \sum\tau_\alpha\right|.$$

Nous allons montrer que le système $|L_2|$ est irréductible.

Retournons au modèle projectif de la surface $\Phi$ considéré au début et projetons cette surface des points $O'_1$, $O'_2$, $O'_3$ sur un espace $S_{r-3}$.

Nous obtenons une surface $\Phi'$ d'ordre 332 sur laquelle au domaine du point $O'_1$ correspond l'ensemble d'une conique $\sigma'_\alpha$, d'une droite $\tau'_\alpha$ rencontrant $\sigma'_\alpha$ en un point et d'une droite $\sigma'_\beta$ rencontrant $\tau'_\alpha$ en un point double biplanaire pour la surface. La conique $\sigma'_\alpha$ et la droite $\tau'_\alpha$ appartiennent à un espace à trois dimensions $S'_3$ qui ne peut contenir $\sigma'_\beta$. En partant de $O'_2$, $O'_3$ on obtient de même des espaces $S''_3$, $S'''_3$ contenant le premier la conique $\sigma''_\alpha$ et la droite $\tau''_\alpha$, le second, la conique $\sigma'''_\alpha$ et la droite $\tau'''_\alpha$.

Menons, par une courbe $K'_8$ tracée sur $\Phi'$, une hypersurface $V^n$ d'ordre $n$ ne contenant pas la surface. Elle rencontre encore celle-ci suivant une courbe H et les hypersurfaces $V^n$ passant par H découpent sur $\Phi'$ le système $K'_8$.

Menons, par les espaces $S'_3$, $S''_3$, $S'''_3$ un hyperplan rencontrant encore $\Phi'$ suivant une courbe $H_1$. Les hypersurfaces d'ordre $n+1$ passant par les courbes H et $H_1$ découpent sur $\Phi'$ le système irréductible $|L_2|$.

En résumé : *Le système canonique de la surface* $\Phi$ *contient sept composantes fixes : la courbe* $K'_1$, *rationnelle, de degré virtuel* $-1$ *et les six courbes* $\sigma_\alpha$, $\tau_\alpha$, *rationnelles, de degré virtuel* $-3$. *La partie variable des courbes canoniques est une courbe elliptique d'un faisceau* $|K'_3|$.

*Le système bicanonique est irréductible et comprend des courbes contenant la courbe* $K'_1$ *comme partie.*

(Manuscrit reçu le 15 décembre 1956.)