Godeaux, Lucien
1961
Annali di Matematica pura ed applicata
(IV), Vol. LIII, pp. 9-20

Quelques propriétés d'une surface associée à une suite de Laplace terminée.

Par Lucien Godeaux (à Liège).

À M. Enrico Bompiani pour son Jubilé scientifique.

Résumé. - *On établit que si la suite de* Laplace *associée dans l'espace à cinq dimensions à une surface de l'espace ordinaire est terminée, il existe deux congruences W dont la surface est une nappe focale et qui sont liées intrinsèquement à cette surface.*

C'est la lecture d'un mémoire de M. Bompiani qui fut le point de départ de nos recherches de géométrie projective différentielle [1]. On sait qu'une surface (x) rapportée à ses asymptotiques u, v étant donnée, M. Bompiani lui associe une suite de Laplace de la manière suivante: Soient Q l'hyperquadrique de Klein de l'espace S_5 à cinq dimensions qui représente l'espace réglé et U, V les points de Q qui représentent les tangentes asymptotiques en un point de la surface (x). Les points U, V sont transformés de Laplace l'un de l'autre, propriété établie à la même époque d'une manière indépendante par Tzitzeica [2]. Les points U, V appartiennent à une suite de Laplace L que nous écrivons

$$(L) \qquad \ldots,\ U_n,\ldots,\ U_1,\ U,\ V,\ V_1,\ldots,\ V_n,\ldots,$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u.

La suite L est autopolaire par rapport à Q et M. Bompiani a établi que si cette suite s'arrête au point U_n en présentant le cas de Laplace, elle s'arrête au point V_{n+2} en présentant le cas de Goursat, précisément si la courbe décrite par le point U_n, qui ne dépend que de v, n'appartient pas à un hyperplan.

Dans ce travail, nous considérons une surface (x) dont la suite de Laplace associée présente la particularité précedente. Nous restons dans le cas général et supposons que les points V_{n+1}, V_{n+2} n'appartiennent pas à l'hyperquadrique Q. La droite $V_{n+1}\,V_{n+2}$ coupe alors Q en deux points distincts G_1, G_2. Nous montrons qn'il existe deux suites de Laplace, inscrites dans la suite L, qui se terminent aux points G_1, G_2 en présentant le cas de Goursat et, dans l'autre sens, en présentant le cas de Laplace.

Il en résulte que la surface (x) est nappe focale de deux congruences W qui lui sont intrinsèquement liées. Dans le cas $n = 1$, où les asymptotiques u de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires, et dans le cas $n = 2$, où les réglées gauches asymptotiques associées aux courbes u appartiennent à des complexes linéaires, nous indiquons une construction géométrique de ces congruences. Le cas $n = 0$, où la surface (x) est réglée, a été traité ailleurs [3].

Nous utilisons la terminologie et les notations de notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé* (4), en les rappelant succintement.

1. A une surface (x), non réglée, rapportée à ses asymptotiques u, v, nous associons une suite de Laplace L de la manière suivante: Soient U, V les points de l'hyperquadrique de Klein, Q, de S_5, qui représentent les tangentes aux asymptotiques u, v en un point x de la surface (x). Le point V est le transformé de Laplace de U dans le sens des u et le point U, celui de V dans le sens des v (Bompiani, Tzitzeica). Les points U, V sont donc consécutifs dans une suite de Laplace

$$(L) \qquad \ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

La suite L est autopolaire par rapport à Q: le point U_n est le pôle de l'hyperplan $V_{n-2} V_{n-1} V_n V_{n+1} V_{n+2}$ et le point V_n celui de l'hyperplan $U_{n-2} U_{n-1} U_n U_{n+1} U_{n+2}$.

Les coordonnées projectives normales de Wilczynski du point x satisfont au système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$

$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0,$$

où a, b, c_1, c_2 sont des fonctions de u, v différentiables autant de fois qu'il sera nécessaire. De plus, la surface (x) n'étant pas réglée, les fonctions a, b ne peuvent être identiquement nulles.

Nous avons

$$U = | \, x \quad x^{10} \, | , \qquad V = | \, x \quad x^{01} \, | ,$$

d'où

$$U^{10} + 2bV = 0, \qquad V^{01} + 2aU = 0.$$

D'une manière générale, nous avons

$$U_n = U_{n-1}^{01} - U_{n-1}(\log bh_1 \ldots h_{n-1})^{01}, \qquad U_n^{10} = h_n U_{n-1},$$

$$V_n = V_{n-1}^{10} - V_{n-1}(\log ak_1 \ldots k_{n-1})^{10}, \qquad V_n^{01} = k_n V_{n-1},$$

où

$$h_n = -(\log bh_1 \dots h_{n-1})^{11} + h_{n-1}, \qquad k_n = -(\log nk_1 \dots k_{n-1})^{11} + k_{n-1}.$$

Nous désignons par

$$\Omega(p, q) = 0$$

la condition pour que deux points p, q soient conjugués par rapport à Q, de sorte que l'équation de cette hyperquadrique soit $\Omega(p, p) = 0$.

Rappelons que nous avons

$$\Omega(U_1, U_1) = -2\Delta, \qquad \Omega(V_1, V_1) = 2\Delta$$

où

$$\Delta = | x \quad x^{10} \quad x^{01} \quad x^{11} | \neq 0,$$

de sorte que les points U_1, V_1 n'appartiennent jamais à Q.

2. Supposons que la suite L s'arrête au point U_n en présentant le cas de LAPLACE. Cela signifie que les tangentes aux courbes v aux points d'une courbe u de la surface (U_{n-1}) forment un cône de sommet U_n. Dans ces conditions, le point U_n ne dépend que de v et on a $h_n = 0$. Lorsque v varie, le point U_n décrit une courbe (U_n) que nous supposerons ne pas appartenir à un hyperplan. Observons que nous avons nécessairement $n > 0$, car autrement on aurait $b = 0$, et la surface (x) serait réglée, contrairement à l'hypothèse.

La suite L s'arrête, dans le sens des u, au point V_{n+2}, en présentant le cas de GOURSAT (BOMPIANI).

Le point V_{n+2} est le pôle, par rapport à Q, de l'hyperplan $U_n U_n^{01} U_n^{02} U_n^{03} U_n^{04}$, osculateur en U_n à la courbe (U_n); il ne dépend donc que de v et V_{n+2} ne dépend que de v. Le point V_{n+1} est le pôle de l'hyperplan $U_{n-1} U_n U_n^{01} U_n^{02} U_n^{03}$ et dépend donc de u et de v. La droite $V_{n+1} V_{n+2}$, polaire de l'espace $U_n U_n^{01} U_n^{02} U_n^{03}$, qui ne dépend que de v, reste donc fixe lorsque u varie; elle est le lieu du point V_{n+1} lorsque u varie. Le lieu de cette droite est la développable (V_{n+1}) dont l'arête de rebroussement est la courbe (V_{n+2}).

Ceci rappelé, nous supposerons que les points V_{n+1}, V_{n+2} n'appartiennent pas à l'hyperquadrique Q. Cette hypothèse implique que les points de rencontre de la droite $V_{n+1} V_{n+2}$ avec Q sont distincts, car si cette droite était tangente à Q, le point de contact serait nécessairement un des points V_{n+1}, V_{n+2}.

Pour exprimer que le point V_{n+2} ne dépend pas de u, nous écrirons

$$V_{n+2}^{10} + A V_{n+2} = 0.$$

3. Soit G un des points de rencontre de la droite $V_{n+1}V_{n+2}$ avec Q.

L'hyperplan polaire de G par rapport à Q passe par les points $U_n U_n^{01} U_n^{02} U_n^{03}$ et par le point G. C'est l'hyperplan tangent à Q en G.

Nous pouvons écrire

$$G = V_{n+2} + \lambda V_{n+1},$$

où λ satisfait à la relation

$$\lambda^2\Omega(V_{n+1}, V_{n+1}) + 2\lambda\Omega(V_{n+1}, V_{n+2}) + \Omega(V_{n+2}, V_{n+2}) = 0. \tag{1}$$

On en déduit

$$G^{10} = (\lambda - A)V_{n+2} + (\lambda^{10} + \lambda_{n+1}K_{n+1})V_{n+1},$$

où nous posons pour abréger

$$K_{n+1} = (\log.\, a\, k_1 \dots k_n)^{10}.$$

Le point G^{10} appartient donc à la droite $V_{n+1}V_{n+2}$; son hyperplan polaire passe donc par les points $U_n U_n^{01} U_n^{01} U_n^{03}$. Il passe de plus par le point G, car on a

$$\Omega(G, G) = 0, \qquad \Omega(G, G^{10}) = 0.$$

Les hyperplans polaires de G, G^{10} coïncident donc et G^{10} coïncide avec G. Par conséquent, nous avons

$$\lambda - A = \frac{\lambda^{10} + \lambda K_{n+1}}{\lambda}. \tag{2}$$

Nous allons retrouver cette relation par une autre voie. Dérivons la relation (1) par rapport à u. Il vient

$$\begin{gathered}[\lambda\Omega(V_{n+1}, V_{n+1}) + \Omega(V_{n+1}, V_{n+2})]\lambda^{10} \\ + \lambda^2[K_{n+1}\Omega(V_{n+2}, V_{n+1}) + \Omega(V_{n+1}, V_{n+2})] \\ + \lambda[K_{n+1}\Omega(V_{n+1}, V_{n+2}) + \Omega(V_{n+2}, V_{n+2}) - A\Omega(V_{n+2}, V_{n+2})] - A\Omega(V_{n+2}, V_{n+2}) = 0,\end{gathered}$$

ce qui peut s'écrire

$$\lambda^{10}\Omega(V_{n+1}G) + \lambda K_{n+1}\Omega(V_{n+2}, G) + \lambda\Omega(V_{n+2}, G) - A\Omega(V_{n+2}, G) = 0.$$

Mais de la relation (1) on tire

$$\lambda\Omega(V_{n+2},\ G) + \Omega(V_{n+2},\ G) = 0,$$

d'où

$$\Omega(V_{n+1},\ G)[\lambda^{10} + \lambda K_{n+1} - \lambda(\lambda - A)] = 0,$$

et, puisque $\Omega(V_{n+1},\ G)$ n'est pas nul, la relation (2).

Nous pouvons finalement écrire

$$G^{10} = (\lambda - A)G = \frac{\lambda^{10} - \lambda K_{n+1}}{\lambda} G.$$

4. Nous avons

$$G^{01} = (k_{n+2} + \lambda^{01})V_{n+1} + \lambda k_{n+1}V_n.$$

En dérivant la relation (1) par rapport à v, nous obtenons

$$[\lambda\Omega(V_{n+1},\ V_{n+1}) + \Omega(V_{n+1},\ V_{n+2})]\lambda^{01}$$
$$+ \lambda^2 k_{n+1}\Omega(V_n,\ V_{n+1}) + \lambda[k_{n+1}\Omega(V_n,\ V_{n+2}) + k_{n+2}\Omega(V_{n+1},\ V_{n+1})]$$
$$+ k_{n+2}\Omega(V_{n+1},\ V_{n+2}) = 0.$$

ce que nous pouvons écrire

$$\Omega(V_{n+1},\ G)[k_{n+2} + \lambda^{01}] + \lambda k_{n+1}\Omega(V_n,\ G) = 0.$$

On en déduit

$$\frac{k_{n+2} + \lambda^{01}}{\Omega(V_n,\ G)} = \frac{\lambda k_{n+1}}{-\Omega(V_{n+1},\ G)} = \varphi^{-1}.$$

Posons

$$G_1 = V_{n+1}\Omega(V_n,\ G) - V_n\Omega(V_{n+1},\ G) = \varphi G^{01}.$$

On a alors

$$G_1^{10} - [A - K_n - K_{n+1}]G_1 = G\Omega(V_n,\ G).$$

Jointe à la relation $G_1 = \varphi G^{01}$, cette équation montre que le point G_1 décrit un réseau $(u,\ v)$ conjugué à la congruence $(V_n V_{n+1})$.

5. Le point G_1 appartient à une suite de Laplace (G) inscrite dans la suite L. les transformés successifs de G_1 dans le sens des v sont situés sur les droites $V_{n-1}V_n, \ldots, VU, UU_1, \ldots$.

Appelons J celui de ces points situé sur la droite UV, $J_{-1}, J_{-2}, \ldots$ $J_{-n-1} = G_1$, $J_{-n-2} = G$ ses transformés successifs dans le sens des u, $J_1, J_2, \ldots$ ses transformés successifs dans le sens des v.

D'après ce qu'on vient de voir, la suite (G) se termine dans le sens des u au point J_{-n-2} en présentant le cas de Goursat. Nous allons voir qu'elle se termine dans le sens des v en présentant le cas de Laplace.

On peut écrire

$$J = \lambda U - \mu V$$

et choisir le facteur de proportionnalité de λ, μ pour avoir

$$\mu^{10} + 2b\lambda = 0, \qquad \lambda^{01} + 2a\mu = 0,$$

c'est-a-dire que λ, μ satisfont aux mêmes équations que les coordonnées des points U, V.

Imaginons un espace à six dimensions S_6 contenant S_5 et soient U' le point dont les coordonnées sont celles de U et μ, V' le point dont les coordonnées sont celles de V et λ. Nous avons

$$U'^{10} + 2bV' = 0, \qquad V'^{01} + 2aU' = 0;$$

les points U', V' sont donc consécutifs dans une suite de Laplace L',

$$(L') \qquad \ldots, U_n', \ldots, U_1', U', V', V_1', \ldots, V_n', \ldots$$

qui se forme exactement de la même manière que la suite L.

D'après le choix des coordonnées des points de S_6, l'espace S_5 est une des faces de la figure de référence; soit 0 le sommet opposé de celle-ci.

La suite L est la projection de L' à partir de 0 sur S_5. Le point J est l'intersection des droites UV, $U'V'$, le point J_1 celui des droites UU_1, $U'U_1'$, et ainsi de suite.

La suite L' s'arrête au point U_n' dans les sens des v, puisque $h_n = 0$. D'autre part, le point V'_{n+2} est l'intersection des droites OV_{n+2}, $V'_{n+1}\,G$. Lorsque u varie seul, les points V_{n+2}, G, les droites OV_{n+2}, $V_{n+1}V_{n+2}$ et les plans $OV_{n+1}V_{n+2}$, $V_nV_{n+1}V_{u+2}$ restent fixes. Si le point V'_{n+2} dépendait de u, il devrait se déplacer, lorsque v varie, sur la droite $V_{n+2}V'_{n+2}$. Les tangentes aux lignes v aux points V'_{n+2} de cette droite devraient passer par G. Ce point serait le transformé de Laplace de V'_{n+2} dans le sens des v, alors que ce transformé doit être V'_{n+1}, qui dépend de u, v. On en conclut que la droite $V'_{n+1}V'_{n+2}$ ne dépend pas de u et que la suite L' se termine dans le sens des u au point V'_{n+2} en présentant le cas de Goursat.

Le point U_n' est certainement distinct de U_n, sans quoi le point J_n coïnciderait avec U_n également.

Appelons J_{n+1} le point d'intersection des droites $U_n U_n^{01}$, $U_n' U_n'^{01}$. Considérons, sur la surface (J_n), une courbe u. Les tangentes aux courbes v aux points de cette courbe u doivent se trouver dans le plan $J_n U_n U_n^{01}$ d'une part et d'autre part dans le plan $J_n U_n' U_n'^{01}$ car le réseau (J_n) est conjugué à la congruence $(U'_{n-1} U_n')$. Ces tangentes doivent donc passer par le point J_{n+1}, qui ne dépend que de v. Il en résulte que la suite (G) se termine au point J_{n+1} en présentant le cas de Laplace.

La suite (G), *comme la suite* (L), *comprend* $2n + 4$ *termes; elle se termine dans le sens des* v *au point* J_{n+1} *en présentant le cas de Laplace et dans le sens* u *au point* $J_{-n-2} = G$ *en présentant le cas de Goursat.*

6. Soit maintenant $(\bar{x})$ la seconde surface focale de la congruence (j), lieu de la droite j représentée par le point J. A cette surface est attachée une suite de Laplace $(\bar{L})$,

$$(\bar{L}) \qquad \ldots, \; \bar{U}_n, \ldots, \; \bar{U}_1, \; \bar{U}, \; \bar{V}, \; \bar{V}_1, \ldots, \; \bar{V}_n, \ldots,$$

d'une manière analogue à la suite L pour la surface (x). La suite $\bar{L}$ est circonscrite à la suite (G).

Le point $\bar{U}_{n-1}$ dépend de u, v, mais le point $\bar{U}_n$ peut dépendre de u, v ou de v seulement. Supposons qu'il dépende de u, v. Considérons les tangentes aux courbes v aux points d'une courbe u de la surface $(\bar{U}_n)$. Ces droites doivent passer par le point J_{n+1}, indépendant de u et la suite L s'arrête donc au point $\bar{U}_{n+1} = J_{n+1}$ en présentant le cas de Laplace.

Observons que nous avons supposé que la courbe (U_n) n'appartenait pas à un hyperplan. Le point $\bar{U}_{n+1}$ appartient à la droite $U_n U_n^{01}$, le point $\bar{U}_{n+1}^{01}$ à la droite $U_n^{01} U_n^{02}$, le point $\bar{U}_{n+1}^{02}$ à la droite $U_n^{02} U_n^{03}$, le point $\bar{U}_{n+1}^{03}$ à la droite $U_n^{03} U_n^{04}$, enfin le point $\bar{U}_{n+1}^{04}$ à la droite $U_n^{04} U_n^{05}$. Les points $\bar{U}_{n+1} \ldots \bar{U}_{n+1}^{04}$ ne peuvent appartenir à un espace à trois dimensions, car par celui-ci et par U_n passerait un hyperplan qui contiendrait les points $U_n^{01}, \ldots, U_n^{05}$ et par conséquent la courbe (U_n), contrairement à l'hypothèse. Mais la courbe $(\bar{U}_{n+1})$ pourrait appartenir à un hyperplan, sans appartenir à un espace de dimension inférieure.

La suite $\bar{L}$ s'arrêtant au point $\bar{U}_{n+1}$ en présentant le cas de Laplace, elle s'arrête au point $\bar{V}_{n+3}$ en présentant le cas de Goursat. Le point $\bar{V}_{n+3}$ décrit une courbe lorsque v varie si la courbe $(\bar{U}_{n+1})$ n'appartient pas à un hyperplan, il est fixe dans le cas contraire.

Dans les deux cas, le point $\bar{V}_{n+2}$ dépend de u et v. Considérons sur la surface $(\bar{V}_{n+2})$ une courbe u et les tangentes aux courbes v aux points de cette courbe u. Ces droites passent par le point $G = J_{-n-2}$ qui reste fixe lorsque u varie. La courbe (J_{-n-2}) serait la transformée de la surface $(\bar{V}_{n+2})$

dans le sens des v, alors que cette transformée doit être ($\overline{V}_{n+1}$). Nous arrivons donc à une absurdité et par conséquent la suite $\overline{L}$ doit s'arrêter au point $\overline{U}_n$, qui ne dépend que de v. Elle présente nécessairement le cas de Laplace, car la droite $\overline{U}_n\overline{U}_n^{01}$ passe par le point J_{n+1}.

La courbe ($\overline{U}_n$) peut appartenir à une hyperplan mais non à un espace à trois dimensions, car autrement (U_n) appartiendrait à un hyperplan, contrairement à l'hypothèse. Le point $\overline{V}_{n+2}$, pôle de l'hyperplan $\overline{U}_n \dots \overline{U}_n^{04}$, ne dépend pas de u. Il décrit une courbe ($\overline{V}_{n+2}$) lorsque v varie si la courbe ($\overline{U}_n$) n'appartient pas à un hyperplan, il reste fixe dans le cas opposé. La première hypothèse donne le cas de Goursat, la seconde le cas mixte.

Le point $\overline{V}_{n+1}$ engendre la développable lieu des tangentes à la courbe ($\overline{V}_{n+2}$) dans le premier cas, le cône projetant la courbe (J_{-n-2}) du point fixe dans le second.

Au deux nappes focales de la congruence (j) *sont associées dans* S_5 *deux suites de Laplace formées toutes deux de* $2n+4$ *points, s' arrêtant toutes deux dans le sens des* v *en présentant le cas de Laplace et dans le sens des* u *en présentant le cas de Goursat* (*ou éventuellement pour l'une d'elles le cas mixte*).

7. Désignons par P le pôle par rapport à Q de l'hyperplan $J_2J_1JJ_{-1}J_{-2}$, c'est-à-dire la seconde image du complexe linéaire osculateur à la congruence (j). Plus généralement, appelons P_i le pôle de l'hyperplan $J_{-i-2}J_{-i-1}J_{-i}J_{-i+1}J_{-i+2}$, et P_{-i} le pôle de l'hyperplan $J_{i-2}J_{i-1}J_iJ_{i+1}J_{i+2}$. Les points

$$(\mathfrak{S}) \qquad \dots,\ P_i,\dots,\ P_1,\ P,\ P_{-1},\dots,\ P_{-i},\dots$$

forment une suite de Laplace dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Le point P est l'intersection des droites $U\overline{U}$, $V\overline{V}$; le point P_i celui des droites $U_{i-1}\overline{U}_{i-1}$ et $U_i\overline{U}_i$; le point P_{-i}, celui des droites $V_{i-1}\overline{V}_{i-1}$ et $V_i\overline{V}_i$.

Voyons ce que devient la suite $\mathfrak{S}$ dans le cas actuel.

Le point P_{-n-2}, pôle de l'hyperplan $J_nJ_{n+1}J_{n+1}^{01}J_{n+1}^{02}J_{n+1}^{03}$, dépend de u et v.; il appartient à la droite $V_{n+2}\overline{V}_{n+2}$, qui ne dépend pas de u. Donc, lorsque u varie, le point P_{-n-2} décrit la droite $V_{n+2}\overline{V}_{n+2}$.

Le point P_{-n-3}, pôle de l'hyperplan $J_{n+1}\dots J_{n+1}^{04}$, ne dépend que de v et appartient à la droite $V_{n+2}\overline{V}_{n+2}$. On en conclut que la suite $\mathfrak{S}$ s'arrête au point P_{-n-3} en présentant le cas de Goursat ou le cas mixte si $\overline{V}_{n+2}$ est fixe. Dans ce cas P_{-n-3} coincide avec ce dernier point. La droite $V_{n+2}\overline{V}_{n+2}$ engendre une développable dont l'arête de rebroussement est la courbe (P_{-n-2}) ou un cône de sommet $\overline{V}_{n+2}$ si ce point est fixe.

Le point P_n est le pôle de l'hyperplan $J_{-n-2}\dots J_{-n+2}$ osculateur à la courbe (J_{-n-2}), et par conséquent ne dépend que de v. La suite $\mathfrak{S}$ s'arrête donc dans le sens des v au point P_n en présentant nécessairement le cas de Laplace.

La suite $\mathcal{S}$ contient, comme les suites L, $\bar{L}$ et (G), $2n+4$ points; elle s'arrête aussi dans le sens des v en présentant le cas de LAPLACE et dans le sens des u en présentant le cas de GOURSAT ou le cas mixte.

8. Les plans $J_i J_{i+1} J_{i+2}$ et $P_{-i} P_{-i-1} P_{-i-2}$ sont conjugués par rapport à Q et leurs sections par cette hyperquadrique représentent les génératrices des deux modes d'une quadrique que nous désignerons par Ψ_i. Le nombre i peut prendre les valeurs n, $n-1, \dots, 0, \dots, -n$ et on a donc une suite de $2n+1$ quadriques. A ces quadriques, on peut ajouter la quadrique Ψ_{n+1} qui représente les plans $J_{n+1} J^{01}_{n+1} J^{02}$ et $P_{-n-1} P_{-n-2} P_{-n-3}$; elle ne dépend que de v.

La quadrique Ψ_{-n}, qui représente les plans $J_{-n} J_{-n-1} J_{-n-2}$ et $P_n P^{01}_n P^{02}_n$, ne dépend également que de v.

Les autres quadriques dépendent de u et v; on sait que deux quadriques consécutives se touchent en quatre points qui sont caractéristiques pour les deux quadriques.

La quadrique Ψ, qui correspond aux plans $J_1 J J_{-1}$ et $P_1 P P_{-1}$, est décomposée en deux plans: les plans focaux de la congruence (j), qui sont d'ailleurs les plans tangents aux surfaces (x) et $(\bar{x})$. En effet, le plan $P_1 P P_{-1}$ passe par les droites $U\bar{U}$ et $V\bar{V}$; il coupe donc Q suivant les droites UV et $\bar{U}\bar{V}$. La première représente le faisceau des tangentes (x, ξ) au point x à la surface (x), la seconde le faisceau $(\bar{x}, \bar{\xi})$ des tangentes á la surface $(\bar{x})$ au point $\bar{x}$, ξ et $\bar{\xi}$ étant les plans tangents à (x), $(\bar{x})$ en x, $\bar{x}$. Le plan $J_1 J J_{-1}$ coupe Q suivant deux droites joignant le point J aux points d'intersection de Q avec la droite $J_1 J_{-1}$. L'une représente le faisceau de rayons $(x, \bar{\xi})$, l'autre le faisceau de rayons $(\bar{x}, \xi)$.

9. Dans les cas $n=1$ et $n=2$, on peut obtenir une construction géométrique des droites j. Nous supposerons tout d'abord $n=1$ et remarquerons que l'on peut facilement déterminer la valeur de A. C'est ce que nous ferons d'abord.

Remarquons que l'on a

$$\Omega(U,\ V_2)=0, \qquad \Omega(V,\ V_2)=-2\Delta, \qquad \Omega(V_1,\ V_2)=-2\Delta(\log a\ k_1)^{10}.$$

En dérivant ces relations par rapport à u, on a successivement

$$\Omega(U,\ V_3)-2b\Omega(V,\ V_2)=4b\Delta,$$

$$\Omega(U,\ V_3^{10})-2b\Omega(V,\ V_3)=-4b\Delta(\log b)^{10},$$

$$\Omega[V_1+V(\log a)^{10},\ V_2]+\Omega[V_1,\ V_3+V_2(\log a k_1 k_2)^{10}]=0,\ \Omega(V,\ V_3)=2\Delta(\log a^3 k^2{}_1 k_2)^{10},$$

$$\Omega(U,\ V_3^{10})=4b\left(\log\frac{a^3 k_1{}^2 k_2}{b}\right)^{10}\Delta.$$

On a enfin

$$\Omega(U,\ V_3^{10}) + A\Omega(U,\ V_3) = 0,$$

d'où

$$A = \left(\log \frac{a^3 k_1^2\ \ k_2}{b}\right)^{10}, \qquad A^{10} + A\left(\log \frac{a^3 k_1^2\ \ k_2}{b}\right)^{10}.$$

Actuellement, le point U_1 ne dépend pas de u. Son hyperplan polaire par rapport à Q est $UVV_1V_2V_3$, qui reste fixe quand u varie. Sur la surface (U), une courbe u représente la développable lieu des tangentes à une courbe u de la surface (x). Les tangentes aux courbes v aux points de la courbe u de (U) passent par un point fixe U_1 et par conséquent la courbe u considérée appartient à l'espace polaire de U_1. En d'autres termes, les courbes u de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires.

La polaire de l'espace $U_1U_1^{01}U_1^{02}U_1^{03}$ osculateur à la courbe (U_1) en un point U_1 est la droite V_2V_3, par conséquent quatre espaces $UVV_1V_2V_3$ successifs ont en commun la droite V_2V_3. En d'autres termes, les complexes linéaires aux quels appartiennent quatre courbes u successives de la surface (x) ont en commun les deux droites g, g' représentées sur Q par les points de rencontre G, G' de la droite V_2V_3 avec cette hyperquadrique.

Lorsque v varie, les droites g, g' engendrent des surfaces réglées R, R' représentées par les courbes (G), (G') de Q.

Considérons l'espace $GJ_{-2}J_{-1}J$ osculateur à la courbe (G) au point $G = J_{-3}$. Il coupe l'hyperquadrique Q suivant l'image d'une congruence bilinéaire dont les directrices sont les droites r_1, r_2 représentées par les points d'intersection avec Q de la droite $P_1P_1^{01}$ polaire de l'espace considéré. Chacune des droites r_1, r_2 rencontre la surface R en un point de g et en trois points infiniment voisins successifs, situés sur les trois génératrices infiniment voisines successives de g. Ces droites r_1, r_2 sont donc les tangentes flecnodales de la surface R s'appuyant sur g.

La droite j, qui engendre la congruence (j), est la droite passant par x et s'appuyant sur les tangentes flecnodales r_1, r_2 de la surface R.

Faisons varier u: la droite g reste immobile sur la surface R, de même que les tangentes flecnodales r_1, r_2, mais le point x décrit une courbe u sur (x). On obtient donc la construction suivante de la congruence (j):

Si (x) est une surface dont les asymptotiques u appartiennent à des complexes linéaires, quatre de ces complexes infiniment voisins successifs ont en commun deux droites g, g' dont les lieux, lorsque v varie, sont des réglées R, R'. Les droites issues des points d'une courbe u de la surface (x) et s'appuyant sur les tangentes flecnodales de la réglée R relatives à la génératrice g homologue de la courbe u, engendrent une congruence W dont (x) est une surface focale.

On obtient évidemment une construction analogue d'une seconde congruence en partant de la surface R'.

10. Supposons maintenant $n = 2$. Le point U_2 ne dépend que de v; son hyperplan polaire par rapport à Q est $VV_1V_2V_3V_4$. Cet hyperplan coupe la surface (V) suivant une courbe u. Celle-ci représente le lieu des tangentes aux courbes v aux points d'une courbe u de la surface (x), c'est-à-dire ce que nous avons appelé une «réglée gauche asymptotique relative à une courbe u». La surface (x) présente donc cette propriété que ses réglées gauches asymptotiques relatives aux courbes u appartiennent à des complexes linéaires.

L'espace $U_2U_2^{01}U_2^{02}U_2^{03}$ osculateur à la courbe (U_2) au point U_2 a pour polaire par rapport à Q la droite V_3V_4 qui coupe Q en deux points $G = J_{-4}$, G'. Il en résulte que le complexe linéaire contenant la réglée asymptotique gauche relative à une courbe u de la surface (x) et les complexes linéaires contenant les réglées gauches asymptotiques relatives aux trois courbes u infiniment voisines successives de la première, ont en commun deux droites g, g' dont les images sur Q sont les points G, G'.

Lorsque v varie, les droites g, g' engendrent des réglées R, R'.

Le complexe linéaire osculateur Σ à la réglée R le long de la droite g est représenté sur Q par l'intersection de cette hyperquadrique avec l'hyperplan $J_{-4}J_{-3}\ldots J$, qui coupe UV au point J. Ce point représente donc la tangente au point x à la surface (x) qui appartient au complexe linéaire Σ.

Si (x) est une surface dont les réglées gauches asymptotiques relatives aux courbes u appartiennent à des complexes linéaires, quatre de ces complexes infiniment voisins successifs ont en commun deux droites g, g' qui, lorsque v varie, engendrent des réglées R, R'. Les tangentes à la surface (x) le long d'une courbe u et appartenant au complexe linéaire osculateur à la réglée R le long de la droite g homologue de la courbe u, engendrent une congruence W.

On obtient une seconde congruence W en considérant la réglée R'.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bompiani, *Sull'equazione di Laplace*, «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», 1912, t. 34, pp. 383-407.

La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato «Rendiconti dell'Accademia dei Lincei», 1° sem. 1926, pp. 395-400; 2° sem. 1926, pp. 262-267.

I fondamenti della teoria proiettiva delle curve e delle superficie, (Appendice à la *Geometria proiettiva differenziale* de G. Fubini et E Cech, Bologna, Zanichelli, 1927).

[2] Tzitzeica, *Sur un théorème de M. Darboux*, (C. R. Acad. Sci. Paris, 1910, t. 151, pp. 971-974; Oeuvres, tome I. pp. 193-196, Bucarest, 1941).

Géométrie différentielle projective des réseaux (Bucarest et Paris, 1924).

[3] *Sur les lignes flecnodales des surfaces réglées*, «Rendiconti del Seminario Matematico di Torino», (1958-59, pp. 159-166).

[4] «Actualités scient.,» N. 138 (Paris, Hermann, 1934).