Sur les surfaces de genres nuls possédant des courbes bicanoniques irréductibles;

PAR M. LUCIEN GODEAUX
(Liége).

Castelnuovo a démontré, en 1894, que les conditions de rationalité d'une surface algébrique sont que son genre arithmétique p_a et son bigenre P_2 soient nuls. Il peut donc exister des surfaces non rationnelles, de genres $p_a = p_g = 0$, dont le bigenre P_2 est supérieur à zéro. De fait, Castelnuovo a construit une surface privée de courbe canonique mais ayant un faisceau de courbes bicanoniques elliptiques ($P_2 = 2$) et Enriques a remarqué que la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre était dépourvue de courbe canonique mais possédait une courbe bicanonique d'ordre zéro ($P_2 = 1$) ([1]). Ces exemples montrent que les surfaces régulières, privées de courbe canonique, non rationnelles, peuvent se répartir en deux catégories :

1° Surfaces dont les systèmes bicanonique et pluricanoniques sont composés au moyen d'un faisceau de courbes (elliptiques);
2° Surfaces dont les courbes bicanoniques sont en général irréductibles.

Nous nous occuperons de ces dernières. Rappelons que, pour ces surfaces, le bigenre P_2 et le genre linéaire $p^{(1)}$ sont égaux. De plus,

---

([1]) On trouvera la bibliographie de la question jusqu'en 1935 dans notre opuscule sur *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (*Actualités scientifiques*, n° 123, Paris, Hermann, 1935).

nous avons démontré qu'on a $P_2 \leqq 10$ en nous appuyant sur la formule de Picard, obtenue par voie transcendante. (Il est d'ailleurs probable que la limite supérieure 10 ne peut pas être atteinte.)

Le problème de savoir s'il existait des surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = p^{(1)} > 1$ est resté longtemps sans solution. En 1931, nous avons pu construire une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 2$. Enriques avait démontré que sa surface est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface dont tous les genres sont égaux à l'unité ($p_a = P_4 = 1$). Nous avons démontré que si une surface algébrique régulière de genre $p_a \geqq 1$ contient une involution cyclique d'ordre $p_a + 1$, privée de points unis, l'image de cette involution est une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 1$. C'est l'application de ce théorème qui nous a permis de construire la surface dont il vient d'être question. Plus tard, le même théorème nous a permis de construire une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 3$ [2].

Ajoutons qu'à l'époque où nous construisions la première surface, M. Campedelli construisait de son côté des plans doubles de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 2$ ou 3.

Nous avons repris récemment la question et nous sommes arrivé aux résultats suivants :

Si une surface de genres $p_a = p_g = 0$ possède une courbe bicanonique unique ($P_2 = 1$) d'ordre supérieur à zéro, cette courbe se compose de deux courbes elliptiques sans point commun et dont les triples appartiennent à un même faisceau [3].

Si une surface de genres $p_a = p_g = 0$ possède un faisceau irréductible de courbes bicanoniques ($P_2 = 2$), elle contient quatre courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 de genre 2, se rencontrant deux à deux en un point, telles que les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_2$, $\Gamma_3 + \Gamma_4$ soient des courbes bicanoniques et que $2\Gamma_1 + \Gamma_3$, $2\Gamma_2 + \Gamma_4$ soient des courbes tricanoniques.

---

(2) *Sur la construction de surfaces non rationnelles de genres zéro* (*Bull. Acad. roy. Belgique*, 1949, p. 688-693).

(3) *Sulle superficie algebriche di genere zero e di bigenere uno* (*Bolletino dell' Union Matematica Italiana*, 1958, p. 531-534).

Nous avons pu démontrer que la surface était nécessairement celle que nous avons construite en 1931 ([4]).

Si une surface de genres $p_a = p_g = 0$ contient un réseau irréductible de courbes bicanoniques ($P_2 = 3$), elle contient une courbe Γ de genre 3 et de degré 2, telle que 2Γ soit une courbe bicanonique (sans que Γ soit une courbe canonique), les courbes $\Gamma + \Gamma'$, où Γ' est une adjointe à Γ, soient des courbes tricanoniques et les courbes $2\Gamma'$ des courbes tétracanoniques ([5]).

La difficulté dans ces recherches est de montrer que la surface étudiée contient une courbe 6-canonique formée d'une part de deux courbes tricanoniques et d'autre part de trois courbes bicanoniques, ou bien qu'il existe une courbe dont le double soit une courbe bicanonique sans que la courbe elle-même soit une courbe canonique.

Dans cette Note, nous nous proposons de démontrer que la seconde alternative se présente pour les surfaces ayant $P_2 = 4$ ou $P_2 = 5$.

Il semble bien que lorsque la seconde alternative se présente, la surface pour laquelle on a $P_2 = p^{(1)} = \pi$, soit l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres $p_a = 1$, $p^{(1)} = 2(\pi - 1) + 1$. Remarquons aussi que les procédés que nous avons employés sont différents dans les cas que nous avons étudiés. Il semble difficile de trouver une méthode générale applicable à tous les cas.

Ajoutons que M. Burniat, dans un Mémoire en cours de publication, a construit des surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 2, 3, \ldots, 7$. Ce sont des surfaces contenant une involution d'ordre 4 engendrée par un groupe trirectangle de transformations birationnelles de la surface en soi (plans quadruples abéliens).

1. Soit F une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = \pi$, possédant des courbes bicanoniques en général irréductibles. Nous

---

([4]) *Sur les surfaces de genres géométrique et arithmétique nuls possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles* (*Bull. Acad. roy. Belgique*, 1958, p. 738-748 et 930-933).

([5]) *Note sur les surfaces de genres zéro possédant un réseau irréductible de courbes bicanoniques* (*Bull. Acad. roy. Belgique*, 1959, p. 52-68 et 188-196).

désignerons par $|C_i|$ le système i-canonique de F. Rappelons que :

Le système bicanonique $|C_2|$ de F a la dimension $P_2 - 1 = \pi - 1$, le genre $3(\pi - 1) + 1$ et le degré $4(\pi - 1)$.

Le système tricanonique $|C_3|$ a la dimension $P_3 - 1 = 3(\pi - 1)$, le genre $6(\pi - 1) + 1$ et le degré $9(\pi - 1)$.

Le système tétracanonique $|C_4|$ a la dimension $P_4 - 1 = 6(\pi - 1)$, le genre $10(\pi - 1) + 1$ et le degré $16(\pi - 1)$.

Le système 6-canonique $|C_6|$ a la dimension $P_6 - 1 = 15(\pi - 1)$, le genre $21(\pi - 1) + 1$ et le degré $36(\pi - 1)$.

Supposons $\pi \geqq 4$ et rapportons projectivement les courbes bicanoniques C_2 aux hyperplans d'un espace $S_{\pi-1}$ à $\pi - 1$ dimensions. A la surface F correspond une surface F_2, que nous supposerons simple, d'ordre $4(\pi - 1)$, modèle bicanonique de F.

Sur la surface F_2, les courbes C_3, C_4, C_6 ont respectivement les ordres $6(\pi - 1)$, $8(\pi - 1)$, $12(\pi - 1)$.

Les hyperquadriques $V^2_{\pi-2}$ de $S_{\pi-1}$ découpent sur F_2 les courbes C_4. Il y a $\frac{1}{2}\pi(\pi + 1)$ de ces hyperquadriques linéairement indépendantes et $6(\pi - 1) + 1$ courbes C_4 linéairement indépendantes, donc il y a $\frac{1}{2}(\pi - 1)(\pi - 10)$ hyperquadriques $V^2_{\pi-2}$ linéairement indépendantes passant par F_2. Nous avons établi qu'on avait $\pi \leqq 10$, donc il n'y a pas nécessairement d'hyperquadriques passant par F_2.

Supposons qu'il y ait précisément k hyperquadriques linéairement indépendantes passant par F_2. Alors, dans le système tétracanonique $|C_4|$, on peut distinguer deux systèmes linéaires partiels :

Un système de dimension $\frac{1}{2}\pi(\pi + 1) - k - 1$ découpé sur F_2 par les hyperquadriques de $S_{\pi-1}$;

Un système de dimension $\frac{1}{2}(\pi - 1)(10 - \pi) + k - 1$, que nous désignerons par $|\overline{C}_4|$, dont les courbes ne sont pas découpées par des hyperquadriques de $S_{\pi-1}$.

Dans le système $|\overline{C}_4|$ il ne peut exister de courbe formée de deux courbes bicanoniques C_2.

2. Les hypersurfaces cubiques $V^3_{\pi-2}$ de $S_{\pi-1}$ découpent sur F_2 des courbes 6-canoniques C_6. Le nombre de ces hypersurfaces linéairement indépendantes est égal à $\frac{1}{6}\pi(\pi+1)(\pi+2)$ et il y a $15(\pi-1)+1$ courbes C_6 linéairement indépendantes, donc il a au moins $\frac{1}{6}(\pi-1)(\pi^2+4\pi-84)$ hypersurfaces cubiques linéairement indépendantes passant par la surface F_2.

Pour $\pi > 7$, ce nombre est positif, mais pour $\pi \leqq 7$, il est négatif et il n'y a pas nécessairement d'hypersurfaces cubiques contenant F_2.

Supposons $\pi \leqq 7$ et qu'il y a h hypersurfaces cubiques linéairement indépendantes contenant F_2. Alors, dans le système linéaire $|C_6|$, on peut distinguer deux systèmes linéaires partiels :

Un système de dimension $\frac{1}{6}\pi(\pi+1)(\pi+2)-h-1$ découpé sur F_2 par les hypersurfaces cubiques;

Un second système, que nous désignerons par $|\overline{C}_6|$, dont les courbes ne sont pas découpées par les hypersurfaces cubiques de $S_{\pi-1}$ et dont la dimension est $\frac{1}{6}(\pi-1)(84-\pi^2-4\pi)+h-1$.

3. Supposons $\pi=4$. La surface F_2 est d'ordre 12 et située dans un espace ordinaire. On a nécessairement $k=h=0$. Le système $|\overline{C}_4|$ a la dimension 8 et le système $|\overline{C}_6|$ la dimension 25.

Les courbes tricanoniques C_3 sont d'ordre 18 et ce genre 19. Les surfaces cubiques découpent sur une courbe C_3 une série linéaire d'ordre 54 et de dimension 19, appartenant à une série linéaire complète de dimension 35. Donc, il ne passe pas en général de surface cubique par une courbe C_3. D'ailleurs, les courbes C_6 formées de deux courbes C_3 forment un système continu Σ non linéaire de dimension 18. Les courbes C_6 découpées sur F_2 par les surfaces cubiques forment un système de dimension 19. Ces deux systèmes sont situés dans un système $|C_6|$ de dimension 45, donc ils n'ont pas de courbe commune. On en conclut que le système Σ est tout entier contenu dans $|\overline{C}_6|$.

Une courbe C_6 formée d'une courbe $\overline{C}_4$ et d'une courbe C_2 ne peut être découpée par une surface cubique, car celle-ci devrait être décomposée en un plan, celui de la courbe C_2, et en une quadrique qui devrait passer par $\overline{C}_4$, ce qui est impossible. Donc les courbes $\overline{C}_4 + C_2$ forment un système continu Σ', non linéaire, appartenant à $|\overline{C}_6|$. $|\overline{C}_4|$ ayant la dimension 8 et $|C_2|$ la dimension 3, Σ' a la dimension 11.

Les systèmes Σ, de dimension 18 et Σ', de dimension 11, appartenant à un système linéaire $|\overline{C}_6|$ de dimension 25, ont en commun ∞^4 courbes.

Il existe donc des courbes 6-canoniques formées d'une part de deux courbes tricanoniques et d'autre part d'une courbe bicanonique et d'une courbe tétracanonique non décomposée en deux courbes bicanoniques.

4. Supposons maintenant $\pi = 5$. La surface F_2, d'ordre 16, appartient à un espace linéaire S_4. Elle peut appartenir à une hyperquadrique ou à une hypersurface cubique, c'est-à-dire qu'on peut avoir $k = 1$ ou $h = 1$, mais on a $h + k \leqq 1$.

Supposons tout d'abord $k = h = 0$. Alors $|\overline{C}_4|$ a la dimension 9 et $|\overline{C}_6|$ la dimension 25.

Les courbes tricanoniques C_3 sont d'ordre 24 et de genre 25. Les hypersurfaces cubiques forment un système linéaire de dimension 34 et découpent donc sur une courbe C_3 une série linéaire d'ordre 72 et de dimension 34, appartenant à une série linéaire complète de dimension 47, de sorte que par une courbe C_3 ne passe pas nécessairement une hypersurface cubique. D'ailleurs, le système Σ des courbes C_6 formées de deux courbes C_3 a la dimension 24 et celui des courbes C_6 découpées par les hypersurfaces cubiques a la dimension 34. Ces deux systèmes sont plongés dans le système $|C_6|$ de dimension 60 et n'ont pas en général de courbe commune. Cependant, nous ne pouvons pas exclure qu'il n'y ait de couples de courbes C_3 appartenant à une hypersurface cubique. Observons que par une courbe C_3, il passe au plus une simple infinité d'hypersurfaces cubiques et qu'il y a donc un faisceau de courbes C_3 dont les couples appartiennent à des hypersurfaces cubiques. Le long de chaque courbe de ce faisceau, il y a une hypersurface cubique circonscrite à la surface F_2. Comme $|C_3|$ a la dimension 12, on en conclut qu'il existe dans $|C_3|$ un système linéaire partiel de dimension 10 dont les couples de courbes n'appartiennent pas à des hypersurfaces cubiques. Le système formé par ces couples de courbes a la dimension 20. On peut donc dire que $|\overline{C}_6|$ contient un système Σ de couples de courbes C_3 n'appartenant pas à des hypersurfaces cubiques dont la dimension est au moins égale à 20.

En reprenant le raisonnement fait plus haut, on voit que $|\overline{C}_6|$ contient le système Σ de couples de courbes C_3 de dimension au moins égale à 20 et le système Σ' de dimension 13 de courbes formées d'une courbe $\overline{C}_4$ et d'une courbe C_2. Le système $|\overline{C}_6|$ ayant la dimension 25, les courbes communes à Σ et à Σ' forment un système de dimension 8 au moins.

Lorsque $k=1$, $h=0$, le système $|\overline{C}_4|$ a la dimension 10 et l'on trouve, par le même procédé, qu'il y a au moins ∞^9 courbes $\overline{C}_6$ formées de deux courbes C_3 et d'une courbe $\overline{C}_4$ jointe à une courbe C_2. Lorsque $k=0$, $h=1$, on trouve qu'il y en a au moins ∞^7.

En résumé, pour $\pi=5$, il existe des courbes C_6 formées d'une part de deux courbes C_3 et d'autre part d'une courbe bicanonique jointe à une courbe tétracanonique non dégénérée en deux courbes bicanoniques.

5. Lorsque $\pi=4$ et $\pi=5$, nous avons donc une courbe C_6 formée de deux courbes C_3 d'une part et d'une courbe $\overline{C}_4$ jointe à une courbe C_2 d'autre part. Cela n'est possible que si la courbe C_2 se décompose en deux courbes Γ_1, Γ_2 distinctes ou coïncidentes et la courbe $\overline{C}_4$ en deux courbes X_1, X_2 de telle sorte que l'on ait

$$C_3 \equiv \Gamma_1 + X_1, \qquad C_3 \equiv \Gamma_2 + X_2.$$

Comme $|C_3|$ est adjoint à $|C_2|$, on tire de $C_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2$,

$$C_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma'_2 \equiv \Gamma_2 + \Gamma'_1,$$

d'où l'on conclut $X_1 \equiv \Gamma'_2$, $X_2 \equiv \Gamma'_1$ et

$$C_4 \equiv \Gamma'_1 + \Gamma'_2.$$

Observons que les courbes C_3 contenant la courbe Γ_1 doivent découper sur la courbe Γ_2 la série canonique complète, puisque la surface F est régulière. Or la série canonique complète ne peut posséder de point fixe, par conséquent la courbe Γ_1 ne peut rencontrer la courbe Γ_2.

Soit F_3 le modèle tricanonique de F, obtenu en rapportant projectivement les courbes tricanoniques C_3 aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{3(\pi-1)}$ à $3(\pi - 1)$ dimensions.

Aux courbes Γ_1, Γ_2 correspondent sur F_3 des courbes que nous désignerons par les mêmes symboles. Elles appartiennent à des espaces linéaires S_1, S_2 à r_1, r_2 dimensions. Soient π_1, π_2 les genres des courbes Γ_1, Γ_2.

Les hyperplans de $S_{3(\pi-1)}$ passant par S_1 découpent sur F_3 le système $|\Gamma'_2|$, de dimension $\pi_2 - 1$, donc on a $r_1 + \pi_2 = 3(\pi - 1)$. De même, on a $r_2 + \pi_1 = 3(\pi - 1)$. Le genre de $C_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2$ étant $3(\pi - 1) + 1$, on a

$$\pi_1 + \pi_2 - 1 = 3(\pi - 1) + 1,$$

puisque Γ_1, Γ_2 n'ont aucun point commun. On en déduit

$$r_1 + r_2 + 2 = 3(\pi - 1).$$

Mais cela signifierait que les espaces S_1, S_2 appartiennent à un hyperplan, c'est-à-dire que $C_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2$ appartient à une courbe tricanonique, ce qui est impossible puisque $p_g = 0$.

Ainsi donc, les courbes Γ_1, Γ_2 ne peuvent être distinctes.

6. Il doit donc exister sur la surface F une courbe Γ telle que $C_2 \equiv 2\Gamma$ soit une courbe bicanonique, sans évidemment que Γ soit une courbe canonique. De la relation précédente, on déduit

$$C_3 \equiv \Gamma + \Gamma', \qquad C_4 \equiv 2\Gamma',$$

de sorte que si Γ'_1, Γ'_2 sont deux adjointes à Γ, la courbe

$$C_6 \equiv 2\Gamma + \Gamma'_1 + \Gamma'_2$$

est d'une part composée de deuxcourbes tricanoniques $\Gamma + \Gamma'_1$, $\Gamma + \Gamma'_2$ et d'autre part d'une courbe bicanonique $C_2 \equiv 2\Gamma$ et d'une courbe tétracanonique $C_4 \equiv \Gamma'_1 + \Gamma'_2$ non formée de deux courbes bicanoniques.

Nous avons

$$C_4 \equiv 2\Gamma' \equiv 2C_2,$$

mais nous ne pouvons avoir $\Gamma' \equiv C_2$, car cela entraînerait $\Gamma' \equiv 2\Gamma$, $\Gamma' - \Gamma \equiv \Gamma$ et l'on aurait $p_g > 0$. Il en résulte que le diviseur de Severi de la surface F est pair.

Désignons par π_1 le genre de la courbe Γ et par n_1 son degré. Référons-nous à la surface F_3.

Puisque C_2 est d'ordre $6(\pi - 1)$, Γ est d'ordre $3(\pi - 1)$ et de relation $C_3 \equiv \Gamma + \Gamma'$, on déduit, en prenant les intersections avec Γ,

$$3(\pi - 1) = n_1 + 2(\pi_1 - 1).$$

D'autre part, on a $2\Gamma' \equiv 4\Gamma$ (mais non $\Gamma' = 2\Gamma$), d'où l'on déduit, en prenant les intersections avec Γ, $4(\pi - 1) = 4n_1$. On en conclut

$$\pi_1 = \pi, \qquad n_1 = \pi - 1.$$

7. Supposons $\pi = 4$. La courbe Γ étant de genre 4, le système $|\Gamma'$ a la dimension 3. En supposant que Γ est une courbe isolée, le système des courbes formées de deux courbes Γ' a la dimension 6 et il en est de même du système des courbes 6-canoniques $2\Gamma + \Gamma'_2 + \Gamma'_1$. Or, nous avons trouvé que ce système devait avoir la dimension 4.

Cette différence s'explique de la manière suivante : Dans le système $|C_4|$, les courbes formées de deux courbes C_2 sont en nombre ∞^6 et comme $|C_4|$ a la dimension 18, les courbes C_4 qui ne sont pas formées de deux courbes C_2 forment un système linéaire de dimension 11. Certaines courbes de ce système linéaire sont des courbes formées de deux courbes Γ'.

Une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 4$, dont les courbes bicanoniques sont en général irréductibles, contient une courbe isolée Γ, de genre 4 et de degré 3, telle que la courbe 2Γ soit une courbe bicanonique (sans que Γ soit une courbe canonique). *Le diviseur de Severi de la surface est pair.*

8. Supposons maintenant $\pi = 5$. La courbe Γ est de genre 5 et de degré 4, par conséquent le système adjoint $|\Gamma'|$ a la dimension 4. Les courbes C_4 formées de deux courbes Γ' sont en nombre ∞^8. Le système des courbes $C_6 \equiv 2\Gamma + \Gamma'_1 + \Gamma'_2$ a la dimension 8 dans l'hypothèse où Γ est isolée. C'est ce qui se présente si la surface F_2 n'appartient ni à une hyperquadrique, ni à une hypersurface cubique et s'il existe un faisceau de courbes tricanoniques tel que par chacune de ses courbes passent une simple infinité d'hypersurfaces cubiques.

Dans le cas où F_2 appartient à une hypersurface cubique ($k = 0, h = 1$), la courbe Γ peut être isolée pour la même raison que dans le cas $\pi = 4$. Par contre, si la surface F_2 appartient à une hyperquadrique ($k = 1$, $h = 0$), la courbe Γ ne peut être isolée et appartient à un faisceau au moins. Cette hypothèse doit être exclue.

Supposons en effet que nous ayons une infinité de courbes Γ et soient Γ_1, Γ_2 deux de ces courbes distinctes. Retournons à la surface F_3. Les hyperplans de $S_{3(\pi-1)}$ passant par Γ_1 découpent sur la courbe Γ_2 la série canonique complète, privée de point fixe, donc Γ_1 et Γ_2 ne peuvent avoir de point commun, alors que le degré de $|\Gamma|$ est $\pi - 1 = 4$. On est donc conduit à une absurdité et Γ est une courbe isolée.

Une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 5$ *dont les courbes bicanoniques sont en général irréductibles, contient une courbe isolée* Γ *de genre* 5 *et de degré* 4, *telle que* 2Γ *soit une courbe bicanonique* (sans que Γ soit une courbe canonique). *La surface a le diviseur de Severi pair.*

Le modèle bicanonique de la surface peut appartenir à une hyperquadrique. Sur ce modèle, il existe un faisceau de courbes tricanoniques tel que par une courbe de ce faisceau passent des hypersurfaces cubiques en nombre simplement infini.

(Manuscrit reçu le 19 mars 1959.)