22. La $m^{ième}$ puissance d'un nombre pair x se termine par les mêmes n chiffres que la $m^{ième}$ puissance de $x \pm \frac{10^n}{2^p}$, pourvu que m et n soient $> p$.

SUR QUELQUES COURBES ASSOCIÉES AU TRIANGLE,

par Lucien Godeaux, étudiant (Liége).

Soient L un point quelconque du plan d'un triangle $A_1A_2A_3$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, ses coordonnées normales absolues et L_1, L_2, L_3 ses projections sur BC, CA, AB.

Supposons que les projetantes LL_1, LL_2, LL_3 après avoir tourné de l'angle $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ autour de L dans le sens $A_1A_2A_3$ rencontrent respectivement BC, CA, AB en M_1, M_2, M_3 et qu'après avoir tourné du même angle autour de L dans le sens $A_3A_2A_1$, elles rencontrent les mêmes côtés en M'_1, M'_2, M'_3. Prenons sur les droites LM_1, LM_2, ... les points X_1, X_2, ... tels que

$$\frac{LX_1}{LM_1} = \frac{LX_2}{LM_2} = \frac{LX_3}{LM_3} = \frac{LX'_1}{LM'_1} = \frac{LX'_2}{LM'_2} = \frac{LX'_3}{LM'_3} = \frac{1}{k}.$$

1. Cela posé, nous cherchons d'abord le lieu d'un point L tel que les droites A_1X_1, A_2X_2, A_3X_3 concourent en un même point U ou que les droites $A_1X'_1$, $A_2X'_2$, $A_3X'_3$ concourent en un point U'.

Si l'on projette les contours X_1LL_2, X_1LL_3 sur les perpendiculaires abaissées de X_1 sur A_1A_3 ou sur A_1A_2, on trouve pour les coordonnées du point X_1 (multipliées par $k \sin \alpha$)

$$\mu_{11} = (k-1)\lambda_1 \quad \mu_{12} = k\lambda_2 \sin\alpha + \lambda_1 \sin(\alpha - A_3),$$
$$\mu_{13} = k\lambda_3 \sin\alpha + \lambda_1 \sin(\alpha - A_2);$$

on obtient par analogie celles des points X_2, X_3, ...

Les droites A_1X_1, A_2X_2, A_3X_3 ont donc pour équations

$$\frac{x_2}{\mu_{12}} = \frac{x_3}{\mu_{13}}, \quad \frac{x_3}{\mu_{23}} = \frac{x_1}{\mu_{21}}, \quad \frac{x_1}{\mu_{31}} = \frac{x_2}{\mu_{32}}; \qquad (1)$$

la condition pour qu'elles soient concourantes est

$$\mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} = \mu_{13}\mu_{21}\mu_{32}.$$

On peut l'écrire ainsi

$$\Sigma[k \sin \alpha \sin (\alpha - A_1) - \sin (\alpha - A_2) \sin (\alpha - A_3)] \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3} - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right) = 0 \cdot \quad (2)$$

Le lieu de L est par conséquent une cubique appartenant au faisceau défini par les courbes

$$\Sigma \sin (\alpha - A_1)\, x_1 (x_2^2 - x_3^2) = 0, \qquad (3)$$

$$\Sigma \sin (\alpha - A_2) \sin (\alpha - A_3)\, x_1 (x_2^2 - x_3^2) = 0, \qquad (4)$$

x_1, x_2, x_3 étant les coordonnées courantes.

Les points de base de ce faisceau sont les sommets du triangle $A_1A_2A_3$, les centres des cercles tritangents et le point $\left(\frac{1}{\sin (\alpha - A_1)}, \frac{1}{\sin (\alpha - A_2)}, \frac{1}{\sin (\alpha - A_3)}\right)$ appartenant à l'hyperbole de Kiepert. On peut donc dire que, lorsque α varie, le huitième point de base du faisceau décrit cette hyperbole.

Les cubiques (3) et (4) sont des anallagmatiques en coordonnées normales, c'est-à-dire des courbes qui sont leurs propres transformées par points inverses.

Pour passer au lieu de L lorsque les droites A_1X_1', A_2X_2', A_3X_3' sont concourantes, il suffit de changer α en $-\alpha$ dans l'équation (2).

Les deux cubiques ainsi obtenues se confondent lorsque $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, on trouve alors

$$\Sigma (k \cos A_1 - \cos A_2 \cos A_3) \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3} - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right) = 0.$$

Cette cubique a été étudiée par MM. Neuberg et Schoute (A.F.A.S. Marseille, 1891).

Si $\alpha = 0$, on obtient la cubique des 17 points

$$\Sigma a_2 a_3 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3} - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right) = 0.$$

2. Cherchons maintenant le lieu du point U. A cet effet, écrivons les équations (1) ainsi

$$[x_2 \sin (\alpha - A_2) - x_3 \sin (\alpha - A_3)]\, \lambda_1 - k\lambda_2 x_3 \sin \alpha + k\lambda_3 x_2 \sin \alpha = 0, \quad (1')$$

et éliminons λ_1, λ_2, λ_3. En posant

$$u_1 = x_2 \sin (\alpha - A_2) - x_3 \sin (\alpha - A_3),$$
$$u_2 = x_3 \sin (\alpha - A_3) - x_1 \sin (\alpha - A_1),$$
$$u_3 = x_1 \sin (\alpha - A_1) - x_2 \sin (\alpha - A_2),$$

il vient

$$\begin{vmatrix} u_1 & -kx_3 \sin\alpha & kx_2 \sin\alpha \\ kx_3 \sin\alpha & u_2 & kx_1 \sin\alpha \\ -kx_2 \sin\alpha & kx_1 \sin\alpha & u_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$u_1 u_2 u_3 + k^2 \sin^2\alpha \Sigma u_1 x_1^2 = 0,$$

ou encore

$$\Sigma x_2 x_3^2 \sin(\alpha - A_2)\sin^2(\alpha - A_3) - \Sigma x_2^2 x_3 \sin^2(\alpha - A_2)\sin(\alpha - A_3)$$
$$+ k^2 \sin^2\alpha\,[\Sigma x_2^2 x_3 \sin(\alpha - A_3) - \Sigma x_2 x_3^2 \sin(\alpha - A_2)] = 0 \qquad (6')$$

C'est donc une cubique appartenant à un faisceau défini par les courbes :

$$\Sigma x_2 x_3^2 \sin(\alpha - A_2)\sin^2(\alpha - A_3) - \Sigma x_2^2 x_3 \sin^2(\alpha - A_2)\sin(\alpha - A_3) = 0, \quad (7)$$
$$\Sigma x_2^2 x_3 \sin(\alpha - A_3) - \Sigma x_2 x_3^2 \sin(\alpha - A_2) = 0. \qquad (8)$$

La cubique (7) est une cubique fixe d'un faisceau linéaire, de même que la cubique (8).

Ces cubiques sont circonscrites au triangle $A_1A_2A_3$ et passent par le point $\left(\dfrac{1}{\sin(\alpha - A_1)}, \cdots\right)$ de l'hyperbole de Kiepert. Quand α varie, ce point décrit cette hyperbole, en entraînant le faisceau.

3 Etant donné le point L, on peut choisir d'une infinité de manières k et α tels que les droites A_1X_1, A_2X_2, A_3X_3 concourent en un même point U. Pour obtenir l'équation du lieu géométrique du point U, lorsque L est fixe et que k et α varient, il suffit d'additionner les équations (1), après les avoir écrites ainsi :

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_3 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} x_2\right) k - (x_2 \sin A_2 - x_3 \sin A_3)\cot\alpha$$
$$- (x_2 \cos A_2 - x_3 \cos A_3) = 0, \quad \text{etc.} \qquad (1'')$$

Il vient

$$\Sigma \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_2 x_3 - \lambda_3 x_2) = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma \lambda_1 (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) x_1 = 0. \qquad (u)$$

Donc, pour un même point L, le point U décrit une droite (u) passant par L et par l'inverse de ce point.

Inversement, le lieu géométrique des points L correspondant à un même point U donné, est une cubique passant par les sommets du triangle, par les centres des cercles tritangents et par le point U. Cette cubique est une anallagmatique inverse.

L'équation (u) montre que le lieu des points inverses qui sont collinéaires avec un point U fixe est une cubique (résultat connu), il serait sans doute intéressant d'étudier les cas où la droite (u), au lieu d'envelopper un point, enveloppe une courbe de la n^e classe.

Si l'on avait éliminé k et α entre les équations (1″) en employant la méthode des déterminants, on aurait trouvé que le lieu de U se compose de l'hyperbole de Kiepert, indépendante du point L donné et de la droite (u). Cette introduction de l'hyperbole de Kiepert dans le lieu du point U provient de ce que un des points de base du faisceau auquel appartient la cubique (C), appartient à cette hyperbole.

4. Prenons maintenant sur les droites LM_1, LM_2, LM_3 (notations du § 1) les points Y_1, Y_2, Y_3 tels que

$$LY_1 = \frac{\rho^2}{LM_1}, \qquad LY_2 = \frac{\rho^2}{LM_2}, \qquad LY_3 = \frac{\rho^2}{LM_3}.$$

Les coordonnées des points Y_1, Y_2, Y_3 sont respectivement proportionnelles aux quantités

$$y_{11} = \lambda_1^2 - \rho^2 \sin^2 \alpha, \quad y_{12} = \lambda_1\lambda_2 + \rho^2 \sin \alpha \sin(\alpha - A_3),$$
$$y_{13} = \lambda_1\lambda_3 + \rho^2 \sin \alpha \sin(\alpha - A_2); \quad \text{etc.}$$

Comme on a

$$y_{12} = y_{21}, \quad y_{13} = y_{31}, \quad y_{23} = y_{32},$$

les équations des droites A_1Y_1, A_2Y_2, A_3Y_3 sont

$$\frac{x_2}{y_{12}} = \frac{x_3}{y_{13}}, \quad \frac{x_3}{y_{23}} = \frac{x_1}{y_{12}}, \quad \frac{x_1}{y_{13}} = \frac{x_2}{y_{23}}.$$

Par suite, elles se coupent en un même point U dont les coordonnées sont définies par

$$\frac{m}{x_1} = \lambda_2\lambda_3 + \rho^2 \sin \alpha \sin(\alpha - A_1), \ldots$$

m étant un facteur de proportionnalité.

L'élimination de m et de ρ^2 entre ces trois équations donne le lieu de U :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{x_1} & \dfrac{1}{\lambda_1} & \sin(\alpha - A_1) \\ \dfrac{1}{x_2} & \dfrac{1}{\lambda_2} & \sin(\alpha - A_2) \\ \dfrac{1}{x_3} & \dfrac{1}{\lambda_3} & \sin(\alpha - A_3) \end{vmatrix} = 0,$$

Ce lieu est une conique circonscrite au triangle de référence et passant par le point L et le point $\left(\dfrac{1}{\sin(\alpha - A_1)}, \cdots\right)$ de l'hyperbole de Kiepert.

Les développements de ce § se rapprochent de ceux que M. Neuberg a donnés à l'occasion du point de Kariya (*Sur les hyperboles équilatères*, Mathesis (3), I, 1905).

En terminant, nous remercions M. Neuberg des conseils qu'il a bien voulu nous donner pour la rédaction de ce petit travail.

NOTES MATHÉMATIQUES.

21. *Sur la sécante minimum* (Voir *Mathesis*, p. 68). Voici deux autres manières de trouver la sécante minimum AB passant par un point donné M et limitée en A et B aux côtés d'un angle donné xCy.

a. J'appelle p et q les perpendiculaires abaissées de M sur Ox et Oy, et je prends pour variables les angles A et B du triangle ABC. La sécante ayant pour expression $\dfrac{p}{\sin A} + \dfrac{q}{\sin B}$, avec la condition $A + B + C = \pi$, la règle connue donne

$$\frac{p \cos A}{\sin^2 A} dA + \frac{q \cos B}{\sin^2 B} dB = 0, \qquad dA + dB = 0,$$

de sorte qu'on doit avoir

$$\frac{p}{\sin A} \cot A = \frac{p}{\sin B} \cot B, \quad \text{ou} \quad AM \cot A = BM \cot B.$$

Ce résultat s'interprète facilement : les perpendiculaires élevées en A sur Ox et en B sur Oy interceptent des segments égaux à AM cot A, BM cot B sur la perpendiculaire en M sur AB ; donc les trois perpendiculaires concourent en un même point.

b. Soit A′B′ une sécante menée par M et infiniment voisine de la sécante minimum AB La variation de la longueur AB étant nulle, on a

$$BB' \cos B - AA' \cos A = 0.$$

Or, $BB' : BM = \sin M : \sin B$, $AA' : AM = \sin M : \sin A$; tirant de là les valeurs de BB′ et AA′ pour les substituer dans l'équation de condition, on trouve

$$BM \cot B = AM \cot A.$$