SUR LES HOMOGRAPHIES DE L'ESPACE N'AYANT QU'UNE DROITE UNIE,

par M. L. GODEAUX, Professeur à l'Université de Liége.

1. Parmi les homographies réelles de l'espace se trouve une homographie dépourvue de points et de plans unis, n'ayant qu'une droite unie (1). Par un choix convenable du tétraèdre de référence, cette homographie peut être représentée par les équations

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= \alpha x_1 - \beta x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \\ \rho x_2' &= \beta x_1 + \alpha x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_5, \\ \rho x_3' &= \qquad\qquad\qquad \alpha x_3 - \beta x_4, \\ \rho x_4' &= \qquad\qquad\qquad \beta x_3 + \alpha x_4, \end{aligned}$$

où les coefficients sont des nombres réels.

L'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} \alpha-\rho & -\beta & a_{13} & a_{14} \\ \beta & \alpha-\rho & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & \alpha-\rho & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha-\rho \end{vmatrix} = 0$$

de cette homographie admet les racines doubles $\rho = \alpha \pm \beta i$ et, pour ces valeurs de ρ, le premier membre de l'équation précédente doit être de caractéristique trois. Cela exige que l'un au moins des nombres a_{24}, $a_{14} - a_{23}$ ne soit pas nul.

Nous nous proposons, dans cette note, d'étudier cette homographie par une méthode purement géométrique.

2. Soit Ω une homographie de l'espace n'ayant qu'une droite unie r, sans points ni plans unis. Dans la ponctuelle et dans le faisceau de plans de support r, Ω détermine des projectivités elliptiques ω, ω'. Nous commencerons par montrer qu'il existe, entre cette ponctuelle et ce faisceau de plans, une projectivité θ transformant ω en ω'.

Considérons une droite a s'appuyant en A sur r et ses transformées

(1) Au sujet des homographies de l'espace, on peut consulter : CL. SERVAIS, *Sur les faisceaux de surfaces du second ordre* (Mém. in-8° de l'Acad. royale de Belgique, 1904) ; AD. MINEUR, *Cour de géométrie projective*, t. III (Bruxelles, Van Dyl) ; L. GODEAUX, *Cours de géométrie projective* (Liége, Pholien, 1927).

successives a', a'', a''' par Ω. Soient A′, A″, A‴ les points d'appui respectifs de ces droites sur r.

Supposons qu'il existe une droite s, distincte de r, rencontrant a, a', a'', a''' et soient respectivement P, P_1, P_2, P_3 les points d'appui de s sur ces droites. Il existe une et une seule homographie biaxiale elliptique déterminant sur r la projectivité elliptique ω et ayant comme droites unies r, s et la droite s' que Ω fait correspondre à s. Cette droite s' est distincte de s et s'appuie sur a', a'', a''' en des points P′, P'_1, P'_2 respectivement transformés de P, P_1, P_2 par Ω.

L'homographie $\Omega_1^{-1}\,\Omega$ (1) possède comme points unis tous les points de r ; elle fait correspondre P′ à P_1, P'_1 à P_2 et par suite les droites a', a'' sont unies pour cette homographie. De plus elle fait correspondre s' à s.

La droite s_{-1} que Ω^{-1} fait correspondre à s coupe a en un point P_{-1}. A celui-ci, $\Omega_1^{-1}\,\Omega$ fait correspondre le point P, donc la droite a est unie pour cette homographie. Il en résulte que la droite s' qu'elle fait correspondre à s doit s'appuyer sur a. Il existe donc une infinité de droites s'appuyant sur a, a', a'', a'''.

3. Désignons par Q_1 la quadrique de directrices a, a', a'' et par Q_2 la quadrique de directrices a', a'', a'''. Ω fait correspondre Q_2 à Q_1.

Supposons en premier lieu les quadriques Q_1, Q_2 distinctes. La droite a''' coupe Q_1 en un point A‴ ; si elle coupe encore cette quadrique en un point distinct de A‴, il existe une droite, distincte de r, s'appuyant sur a, a', a'', a'''. D'après ce qui vient d'être établi, il en existe une seconde et les quadriques Q_1, Q_2 coïncident, contrairement à l'hypothèse. La droite a''' doit donc être tangente à Q_1 en A‴. Les quadriques Q_1, Q_2 ont donc même plan tangent en chacun des points A′, A″, A‴. Soit θ la projectivité qui fait correspondre à un point de r le plan tangent en ce point à Q_1 ; ce plan est aussi tangent à Q_2 au même point.

Cela étant, soient M un point de r ; m la droite de Q_1 distincte de r passant par M ; μ le plan rm ; M′, m', μ' les éléments que Ω fait correspondre à M, m, μ. La droite m' appartient à Q_2 et le plan μ' est tangent à Q_2 et par suite à Q_1 en M′. On a donc

$$\omega = \theta^{-1}\,\omega'\theta. \qquad (1)$$

Supposons maintenant que Q_1, Q_2 coïncident. θ conservant la même signification que plus haut, le raisonnement précédent subsiste, la droite m' appartenant à Q_1. Le relation (1) est encore exacte.

---

(1) Nous écrivons les homographies à effectuer successivement en commençant par la droite,

Entre la ponctuelle et le faisceau de plans de support r, *il existe une projectivité faisant se correspondre les projectivités* ω, ω'.

4. Nous démontrerons maintenant que Ω est le produit d'une homologie spéciale par une homographie biaxiale elliptique.

Soient A un point de r ; a une droite passant par A ; B et C deux points de a ; A', a', B', C' les éléments que Ω fait correspondre à A, a, B, C. Désignons maintenant par Ω_1 l'homographie biaxiale elliptique ayant comme droites unies r, BB', CC' et déterminant sur r la projectivité ω. Ω_1 fait correspondre a', A', B', C' respectivement à a, A, B, C. Par suite l'homographie

$$\Omega' = \Omega_1^{-1}\Omega$$

possède comme points unis B, C et tous les points de r. C'est donc une homologie de plan $\rho = ar$. Si le centre d'homologie R n'appartient pas à r, il passe par ce point une droite unie pour Ω_1, Ω' et par suite pour Ω, ce qui est impossible. Donc Ω' est une homologie spéciale dont le centre R appartient à r.

Inversement, soient Ω_1 une homographie biaxiale elliptique et Ω' une homologie spéciale dont le plan ρ passe par la droite unie r de Ω_1 contenant le centre R d'homologie. Considérons l'homographie

$$\Omega = \Omega_1\Omega'.$$

Ω détermine dans la ponctuelle et dans le faisceau de plans de support r les mêmes projectivités elliptiques que Ω_1, par suite Ω ne peut posséder de plans ni de points unis, la droite r étant unie pour cette homographie. Il ne peut exister aucune droite unie pour Ω, distincte de r, passant par R ou située dans ρ. A une droite s ne passant pas par R et non située dans ρ, Ω' fait correspondre une droite s' ; le point ss' appartient à ρ et le plan ss' passe par R. Si s était une droite unie de Ω, Ω_1 ferait correspondre s à s' et le plan ss' serait uni pour Ω_1, ce qui est absurde. Par suite Ω ne possède qu'une droite unie r.

Le produit d'une homologie spéciale par une homographie biaxiale elliptique, le centre de l'homologie appartenant à la droite unie de cette homographie située dans le plan d'homologie, est une homographie n'ayant qu'une droite unie. Inversement, toute homographie n'ayant qu'une droite unie peut être obtenue par ce procédé.

On remarquera que ce théorème établit également l'existence d'une projectivité θ vérifiant la relation (1). Actuellement θ fait correspondre à un point M de r le plan μ déterminé par M et par la droite issue de M et s'appuyant sur BB', CC'.