SUR LES SURFACES

SEMI-CANONIQUES DE L'ESPACE ORDINAIRE

PAR LUCIEN GODEAUX

(Liège)

Nous appelons surface semi-canonique une surface sur laquelle le système canonique complet est découpé par les quadriques ; le système des sections planes est alors le système semi-canonique.

Dans des notes antérieures, nous avons déterminé des surfaces dont le système canonique complet coïncide avec celui des sections planes [1]. Le même procédé peut servir à déterminer des surfaces semi-canoniques. Une surface semi-canonique est nécessairement d'ordre pair $2n$ et possède une courbe double d'ordre $2n(n-3)$, ayant un certain nombre de points triples, triples également pour la surface. Cette courbe double est tracée sur une surface d'ordre $2n-6$, ayant des points doubles aux points triples de la courbe. Le premier stade de la recherche consiste à déterminer une surface d'ordre $2n$ touchant la surface d'ordre $2n-6$ le long de la courbe envisagée. On peut y arriver en utilisant la théorie des involutions du second ordre n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique [2]. Une fois l'existence de cette courbe établie, il reste à construire la surface d'ordre $2n$ passant doublement par la courbe considérée.

[1] *Construction d'une surface canonique du septième ordre* (Bulletin de la Société des Sciences de Liège, 1944, pp. 94-97) ; *Construction d'une surface canonique du huitième ordre* (Bulletin des Sciences mathématiques, 1944, pp. 132-144) ; *Construction d'une surface canonique du neuvième ordre* (Bulletin de l'Académie de Belgique, 1944, pp. 202-212).

[2] *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914, pp. 289-312) ; *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébriques* (Paris, Hermann, 1935).

Appliquant les résultats obtenus au cas $n = 5$, nous montrons que : *La surface d'ordre dix, ayant une courbe double d'ordre vingt et genre 15, possédant seize points triples pour la courbe et pour la surface, est une surface semi-canonique, la courbe double étant supposée tracée sur une surface du quatrième ordre.*

1. Soit F une surface semi-canonique d'ordre m de l'espace ordinaire, c'est-à dire une surface sur laquelle le système canonique complet $|K|$ est découpé par les quadriques de l'espace. Le système $|C|$ des sections planes est le système semi-canonique et on a

$$|K| = |2C|.$$

Le degré du système $|K|$ est égal à $4m$, donc le genre linéaire $p^{(1)}$ de la surface, c'est-à-dire le genre des courbes K, est égal à $4m + 1$. Or, une surface d'ordre m découpe, sur une quadrique, une courbe de genre $(m - 1)^2$, donc les courbes K doivent posséder

$$(m - 1)^2 - (4m + 1) = m (m - 6)$$

points doubles variables, c'est-à-dire que la surface F possède une courbe double D coupant une quadrique en $m (m - 6)$ points. La courbe D est donc d'ordre $\frac{1}{2} m (m - 6)$. Nous supposerons $m = 2n$, de sorte que la surface F, d'ordre $2n$, possède une courbe double D d'ordre $2n (n - 3)$; ses genres sont

$$p_a = p_g = 10, \quad p^{(1)} = 8n + 1.$$

Nous supposerons que la courbe D possède τ points triples $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$, triples également pour la surface F.

Les adjointes d'ordre $2n - 4$ de F doivent se décomposer en une quadrique et une surface Φ, d'ordre $2n - 6$, passant simplement par la courbe D et doublement par les point triples $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$.

2. Soit Ψ une surface du sixième ordre passant simplement par les points $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$. Les surfaces F, et $\Phi + \Psi$ déterminent un faisceau de surfaces d'ordre $2n$ touchant la surface Φ le long de la courbe D. Soit F' une de ces surfaces.

La première polaire d'un point M quelconque, par rapport à Φ, coupe la courbe D, en dehors de $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$, en

$$2n (n - 3) (2n - 7) - 3\tau$$

points ; ce nombre est la classe de la développable lieu des plans tangents à F et à Φ aux points de la courbe D.

La première polaire du point M par rapport à F′ coupe la courbe D, en dehors de $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$, en

$$2n\,(n-3)\,(2n-1)-6\tau$$

points. Parmi ceux-ci, se trouvent les points de contact des plans tangents passant par M ; les autres points, au nombre de

$$\alpha = 12n\,(n-3) - 3\tau,$$

sont doubles pour la surface F′.

3. Supposons que nous ayons construit une surface F′, d'ordre $2n$, ayant des points triples en $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$ et touchant Φ le long de la courbe D. Reprenons la surface Ψ du sixième ordre considérée plus haut et soit $|F'|$ le faisceau déterminé par la surface F′ et la surface $\Phi + \Psi$. En reprenant le raisonnement qui vient d'être fait, on voit que chaque surface du faisceau $|F'|$ possède α points doubles sur la courbe D.

Soient R un point de la courbe D et r une droite passant par R, non tangente en ce point à la surface Φ. Il existe une surface du faisceau $|F'|$ tangente à r en R et possédant par conséquent un point double en ce point. On en conclut que les groupes de α points doubles des surfaces F′ forment sur D une série d'indice un. Comme d'autre part les groupes de cette série correspondent biunivoquement aux surfaces F′, cette série est rationnelle et c'est donc une série linéaire $g^1{}_\alpha$.

Parmi les surfaces de $|F'|$, se trouve la surface $\Phi + \Psi$. Or, la surface Ψ recontre D, en dehors de $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$, en $12n\,(n-3) - 3\tau = \alpha$ points, doubles pour cette surface. Ce groupe de points appartient donc à la série g_α.

On voit donc que les surfaces du sixième ordre passant par $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$ découpent sur D une série linéaire d'ordre α qui, complétée s'il le faut, contient les groupes de points doubles des surfaces F′ d'ordre $2n$ touchant Φ le long de la courbe D.

4. Soit F′ une surface d'ordre $2n$ touchant Φ le long de D, ayant des points triples en $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$. Désignons par G le groupe de ses α points doubles sur D. Supposons qu'il existe une surface Ψ du sixième ordre passant par les points $P_1, P_2, \dots, P_\tau$ et par les points du groupe G, sans contenir D. Les surfaces F′ et $\Phi + \Psi$ déterminent un faisceau dont toutes les surfaces touchant Φ le long de D, ont des points triples en $P_1, P_2, \dots, P_\tau$ et des points doubles aux points du groupe G.

Soient R un point de D, n'appartenant pas à G, et r une droite passant par R et non tangente en ce point à la surface Φ. Il existe une surface F_0' touchant r en R et ayant par suite un point double en R. Considérons la première polaire d'un point M quelconque par rapport à la surface F_0'. La classe de la développable engendrée par les plans tangents à Φ et à F_0' le long de D est égale à $2n(n-3)(2n-7)-3\tau$; la première polaire considérée passe par les points de contact des $2n(n-3)(2n-7)-3\tau$ de ces plans passant par M. En outre, cette première polaire passe par les α points de groupe G, par le point R et deux fois par les points $P_1, P_2, \dots, P_\tau$. On en conclut qu'elle contient la courbe D et, comme M est quelconque, cette courbe est double pour la surface F'_0.

La démonstration de l'existence d'une surface F d'ordre $2n$ semi-canonique est donc ramenée à deux points :

1) Il existe une surface d'ordre $2n$ possédant τ points triples $P_1, P_2, \dots, P_\tau$, touchant une surface d'ordre $2n-6$ le long d'une courbe d'ordre $2n(n-3)$ ayant également des points triples en $P_1, P_2, \dots, P_\tau$.

2) Parmi les surfaces du sixième ordre passant par $P_1, P_2, \dots, P_\tau$, mais ne contenant pas D, il en existe qui coupent D en α points doubles pour la surface d'ordre $2n-6$ dont il vient d'être question.

Il faut en outre naturellement qu'il n'existe aucune surface irréductible d'ordre $2n-4$ passant par la courbe D.

5. Nous allons maintenant déterminer le genre de la courbe D.

Désignons par Γ les sections planes de la surface Φ. Les points doubles $P_1, P_2, \dots, P_\tau$ de cette surface sont équivalents à des courbes rationnelles de degré -2 que nous désignerons respectivement par $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\tau$.

Sur la surface Φ, nous avons

$$2n\Gamma \equiv 2D + 3(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\tau).$$

En représentant comme d'usage par $[X, Y]$ le nombre de points communs à deux courbes X, Y et par $[X, X]$, le degré de la courbe X, nous avons

$$2n\,[D, \Gamma] = 2\,[D, D] + 3\,([\gamma_1, D] + \ldots + [\gamma_\tau, D])$$

d'où

$$[D, D] = 2n^2\,(n-3) - \frac{g\tau}{2},$$

car

$$[D, \Gamma] = 2n\,(n-3), \qquad [\gamma_i, D] = 3.$$

L'opération d'adjonction donne

$$(2n-1)\,\Gamma + \Gamma' \equiv D + D' + 3\,(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\tau).$$

La surface Φ ne possédant aucune autre singularité que les τ points doubles coniques, on a

$$|\,\Gamma'\,| = |\,(2n-9)\,\Gamma\,|,$$

d'où

$$(4n-10)\,\Gamma \equiv D + D' + 3\,(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\tau).$$

En désignant par π le genre de D, on a

$$(4n-10)\,[\Gamma, D] = [D, D] + [D, D'] + 3\,([\gamma_1, D] + \ldots + [\gamma_\tau, D]),$$

d'où

$$2n\,(n-3)\,(4n-10) = 2n^2\,(n-3) - \frac{g\tau}{2} + 2\pi - 2 + 9\tau$$

et

$$\pi = n\,(n-3)\,(3n-10) - \frac{g\tau}{4} + 1.$$

On en conclut que τ doit être multiple de 4 et on posera $\tau = 4\varepsilon$, d'où

$$\pi = n\,(n-3)\,(3n-10) - 9\varepsilon + 1.$$

6. Nous allons appliquer ce qui précède aux premières valeurs de n.

Pour $n = 3$, la solution est banale, les adjointes d'une surface du sixième ordre étant précisément les quadriques.

Supposons $n = 4$, F est du huitième ordre. La surface Φ doit être une quadrique et on a $\tau \leq 1$. Comme τ doit être multiple de 4, on a $\tau = 0$.

Représentons la quadrique sur un plan σ de telle sorte qu'aux section planes correspondent les coniques passant par deux points A_1,

A_2. A la section de Φ par une surface du huitième ordre correspond dans σ une courbe d'ordre 16 ayant en A_1, A_2 des points multiples d'ordre huit. Si la surface en question touche Φ en tout point d'intersection, cette courbe doit se réduire à une courbe d'ordre huit, ayant en A_1, A_2 des points quadruples, comptée deux fois. Mais une telle courbe correspond à la section de Φ par une surface du quatrième ordre. La courbe D serait alors l'intersection de Φ par une surface du quatrième ordre Φ_0. Or, une telle surface serait une adjointe à la surface irréductible du huitième ordre, passant doublement par D, si cette surface existe. Une telle surface ne répondrait pas aux conditions imposées et on ne peut donc avoir $n = 4$.

7. Supposons $n = 5$. La surface F est alors d'ordre dix et la surface Φ d'ordre quatre.

Nous prendrons $\tau = 8$ ($\varepsilon = 2$) et sur la surface Φ, du quatrième ordre, possédant huit points doubles coniques et par conséquent de genres un ($p_a = P_4 = 1$), nous avons

$$10\Gamma \equiv 2D + 3(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_8).$$

Considérons la courbe

$$D_1 \equiv D + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_8,$$

qui existe effectivement et qui passe simplement par les points doubles $P_1, P_2, \dots, P_8$. Nous avons

$$10\Gamma \equiv 2D_4 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_8$$

et par suite (³) la surface Φ est l'image d'une involution du second ordre appartenant à une surface Φ' de genres un également. Les points de diramation de la correspondance (1, 2) existant entre les surfaces Φ, Φ' sont les points doubles $P_1, P_2, \dots, P_8$.

Aux courbes 5Γ correspondent sur la surface Φ' des courbes L_0 de genre 101. Aux courbes D_1 correspondent sur Φ' des courbes L_1 de genre 101 également et les courbes L_0, L_1 appartiennent à un même système linéaire $|L|$ de dimension 101 et de degré 200. Les systèmes linéaires partiels $|L_0|$ et $|L_1|$ ont respectivement les dimensions 51 et 49.

(³) *Sur la construction de surfaces doubles n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation* (Bulletin de l'Académie de Belgique, 1944, pp. 213-225).

Appelons $P'_1, P'_2, \ldots, P'_8$ les points de la surface Φ' unis pour l'involution du second ordre considérée sur cette surface. Ces points correspondent aux points $P_1, P_2, \ldots, P_8$ de la surface Φ. Les courbes L_1 passent simplement par les points $P'_1, P'_2, \ldots, P'_8$ et comme $|L_1|$ est de dimension 49, il existe un système de dimension $49 - 24 = 25$ au moins, de courbes L_1' ayant des points triples en $P'_1, P'_2, \ldots, P'_8$. Il suffit en effet d'imposer trois tangentes en un de ces points à une courbe L_1 pour qu'elle y acquiert un point triple.

Cela étant, aux courbes L'_1 correspondent sur Φ des courbes du système $|D_1|$ ayant des points triples en $P_1, P_2, \ldots P_8$, c'est-à-dire des courbes D. D'après la théorie des involutions apportenant à une surface algébrique, il existe une surface F' d'ordre dix touchant Φ le long de chacune des courbes D : d'autre part, puisque les courbes D ont des points triples en $P_1, P_2, \ldots P_8$, ces surfaces ont nécessairement la multiplicité trois aux mêmes points.

L'application de la formule de Zeuthen à la correspondance entre une courbe L'_1 et son homologue D sur la surface Φ montre que D a bien le genre 33. Considérons les surfaces du sixième ordre passant par les huit points $P_1, P_2, \ldots, P_8$ et ne contenant pas la surface Φ comme partie. Elles sont en nombre ∞^{65} au moins. Elles découpent sur la courbe D, supposée choisie d'une manière générique dans le système $|D|$ qui vient d'être obtenu, une série linéaire d'ordre 96. La courbe D étant de genre 33, cette série est non spéciale et, complétée s'il le faut, a donc la dimension 63.

Mais alors, il existe au moins ∞^1 surfaces du sixième ordre, ne contenant pas Φ comme partie, passant par la courbe D. Ces surfaces sont des adjointes à la surface F, si celle-ci existe. Cette surface ne serait pas une surface semi-canonique ; elle aurait au contraire le genre $p_g \geq 12$.

8. Avant d'aller plus loin, montrons que l'on peut construire une surface F passant doublement par la courbe D considérée ici et évaluons ses genres.

A cet effet, considérons une surface F' ordre dix, touchant Φ le long de D (et ayant des points triples en $P_1, P_2, \ldots, P_8$). Elle possède $\alpha = 96$ points doubles sur la courbe D et il existe une surface Ψ du sixième ordre passant par $P_1, P_2, \ldots, P_8$, par ces 96 points et ne contenant pas D. Les surfaces F' et $\Phi + \Psi$ déterminent un faisceau de surfaces touchant Φ le long de D. Comme nous l'avons montré plus haut, il existe une surface de ce faisceau, soit F, ayant D comme courbe double.

Cela étant, les adjointes à F sont les surfaces du sixième ordre contenant D. Ces surfaces sont formées de Φ et de quadriques, ou sont des surfaces Ψ contenant D.

Les surfaces du sixième ordre passant par $P_1, P_2, \ldots, P_8$ découpent sur Φ les courbes du système.

$$| 6\Gamma - \gamma_1 - \gamma_2 - \cdots - \gamma_8 |.$$

Celles qui contiennent D découpent les courbes

$$6\Gamma - D - \gamma_1 - \gamma_2 - \cdots - \gamma_8.$$

Mais ces courbes rencontrent γ_1 par exemple en -1 point, donc contiennent γ_1 et de même $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_8$. Les surfaces Ψ contenant D découpent donc sur Φ les courbes du système

$$| 6\Gamma - D - 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_8) |.$$

Il est facile de voir que ce système est un faisceau de courbes elliptiques. On en conclut que la surface F envisagée ici a les genres $p_a = p_g = 12$.

9. Nous allons maintenant supposer $\tau = 16$. La surface Φ, du quatrième ordre, possède alors 16 points doubles coniques et est donc une surface de Kummer. Nous avons, en posant

$$D_1 \equiv D + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{16},$$
$$10\Gamma \equiv 2D_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{16}.$$

Les courbes D_1 sont d'ordre 20, de genre 47 et appartiennent à un système linéaire $| D_1 |$ de degré 92. On sait que ces courbes existent et que, le long de chacune d'elles, il y a une surface du dixième ordre inscrite dans Φ (1). Le système $| D_1 |$ est de dimension 47 ; en général, une courbe D_1 rencontre une des courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{16}$ en un seul point, variable. Considérons les courbes D_1 qui passent par deux points fixes de chacune des courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{16}$; elles forment un

(1) G. Humbert, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques* (Journal de Mathématiques, 1893) ; *Oeuvres de G. Humbert*, tome II (Paris, Gauthier-Villars, 1936).

système linéaire de dimension au moins égale à $47 - 32 = 15$. Ces courbes contiennent certainement les courbes $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{16}$ comme parties et sont représentées par

$$D_1 - \lambda (\gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_{16}).$$

Ecrivons qu'une telle courbe rencontre γ_1 par exemple en deux points au moins. On a

$$1 + 2\lambda \geq 2,$$

d'où $\lambda \geq 1$ et précisément $\lambda = 1$. On en conclut que les courbes en question rencontrent en trois points chacune des courbes $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{16}$; ce sont donc les courbes D, dont l'existence est ainsi prouvée.

Choisissons une de ces courbes, que nous continuerons à appeler D. Il existe donc une surface F′ d'ordre dix, ayant des points triples en $P_1, P_2, ..., P_{16}$, touchant Φ le long de D.

Les surfaces du sixième ordre Ψ passant par $P_1, P_2, ..., P_{16}$, forment un système de dimension 57 au moins. Elles découpent sur Φ le système

$$| 6\Gamma - \gamma_1 - \gamma_2 - ... - \gamma_{16} |,$$

qui a le genre 57 et par conséquent les surfaces Ψ forment bien un système de dimension 57. Ces surfaces découpent, sur la courbe D, une série linéaire d'ordre 72, certainement non spéciale et par conséquent de dimension 57, car D est de genre 15. Cette série est découpée complètement par les surfaces Ψ. Cela étant, considérons la surface F′ dont l'existence a été prouvée plus haut; elle possède 72 points doubles sur la courbe D. La surface Ψ qui passe par 57 de ces points passe par les autres et, d'après le raisonnement fait plus haut, il existe une surface F d'ordre dix ayant D comme courbe double.

Il n'existe d'autre part aucune surface du sixième ordre, ne contenant pas Φ comme partie, passant par D, donc F est bien une surface semi-canonique.