SUR LES SURFACES ALGEBRIQUES

INTERSECTIONS COMPLETES D'HYPERSURFACES

PAR LUCIEN GODEAUX
(Liège, Université)

Dans ses *Lezioni sulla teoria delle superfici algebriche* [1], M. F. Enriques a indiqué plusieurs surfaces algébriques normales dont le système canonique est formé par les sections hyperplanes. Plusieurs de ces surfaces sont intersections complètes d'hypersurfaces. L'objet de cette note est de déterminer toutes les surfaces satisfaisant aux deux conditions dont il vient d'être question. Dans ce but, nous établissons le théorème suivant :

La surface F, de l'espace S_r, intersection complète de $r-2$ hypersurfaces algébriques irreductibles générales, d'ordres $n_1, n_2, \ldots, n_{r-2}$, est régulière et son système canonique complet est découpé par les hypersurfaces d'ordre

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_{r-2} - (r+1).$$

En appelant surface canonique une surface dont le système canonique coïncide avec celui des sections hyperplanes, on en déduit le théorème :

Les surfaces canoniques, intersections complètes d'hypersurfaces irréductibles et générales, sont :

Dans l'espace S_4, l'intersection d'une hiperquadrique et d'une hypersurface du quatrième ordre ; l'intersection de deux hypersurfaces cubiques ;

Dans l'espace S_5, l'intersection de deux hyperquadriques et d'une hypersurface cubique;

Dans l'espace S_6, l'intersection de quatre hyperquadriques.

Toutes ces surfaces ont d'ailleurs été rencontrées par M. Enriques.

[1] PADOVA, *Cedam*, 1932.

1. Soient, dans l'espace S_4, V_3^2 une hyperquadrique et V_3 une hypersurface d'ordre n, irréductibles et générales. Ces deux variétés ont en commun une surface F dont nous désignerons par C les sections hyperplanes. Coupons F par un hyperplan ξ. La courbe (F, ξ) est l'intersection de la quadrique (V_3^2, ξ) et de la surface (V_3^n, ξ). Representons la quadrique (V_3^2, ξ) sur un plan ω de manière qu'à ses sections planes correspondent les coniques passant par deux points A_1, A_2.

A la courbe (V_3^2, V_3^n, ξ) correspond dans le plan ω une courbe d'ordre $2n$ ayant la multiplicité n aux points A_1, A_2. Les adjointes de cette courbe sont d'ordre $2n - 3$ et ont la multiplicité $n - 1$ en A_1, A_2; elles sont donc formées de la droite A_1A_2 et des courbes d'ordre $2(n - 2)$ ayant la multiplicité $n - 2$ en A_1, A_2. Il en résulte que sur la courbe (V_3^2, V_3^n, ξ), les surfaces d'ordre $n - 2$ de ξ découpent des groupes canoniques.

La courbe (V_3^2, V_3^n, ξ) est de genre $(n - 1)^2$ et on vérifie aisément par un compte de constantes, que les surfaces d'ordre $n - 2$ de ξ découpent sur cette courbe la série canonique complète. Par conséquent, les hypersurfaces d'ordre $n - 2$ de S_4 découpent, sur une section hyperplane C de F, la série canonique complète. En d'autres termes, l'adjoint $|C'|$ de $|C|$, sur F, possède la même propriété et d'après le théorème de Picard — Severi, la surface F est régulière.

Le système canonique de F est donné par

$$|C' - C| = |(n - 3)C|;$$

il est découpé sur F par les hypersurfaces d'ordre $n - 3$.

En particulier, pour $n = 4$, on obtient la surface (V_3^2, V_3^4), canonique, de genres $p_g = p_a = 5$, $p^{(1)} = 9$.

2. Envisageons maintenant l'intersection F d'une hypersurface cubique V_3^3 et d'une hypersurface V_3^n d'ordre n, irréductibles et générales.

La section de F par un hyperplan ξ est une courbe d'ordre $3n$ tracée sur la surface cubique (V_3^3, ξ). Représentons cette surface sur un plan ω de telle sorte qu'à ses sections planes correspondent les cubiques passant par six points A_1, A_2, ..., A_6. A la courbe (V_3^3, V_3^n, ξ) correspond une courbe d'ordre $3n$ ayant la multiplicité n aux six points A_1, A_2, ..., A_6. Les adjointes à cette courbe sont d'ordre $3(n - 1)$ et ont la multiplicité $n - 1$ aux six points A. Il en résulte que le système canonique de (V_3^3, V_3^n, ξ) est découpé par les surfaces d'ordre $n - 1$ de ξ. Par suite, les hypersurfaces d'ordre $n - 1$ de S_4 découpent sur F le système adjoint $| C' |$ à celui des sections hyperplanes $| C |$.

La courbe (V_3^3, V_3^n, ξ) est de genre $\frac{1}{2}(3n^2 - 3n + 2)$ et il est facile de voir, par un compte de constantes, que les surfaces d'ordre $n - 1$ de ξ découpent sur cette courbe la série canonique complète. Par suite, les variétés V_3^{n-1} de S_4 découpent sur les sections hyperplanes C de F la série canonique complète et la surface est régulière.

On a

$$| C' - C | = | (n - 2) C |$$

et les hypersurfaces d'ordre $n - 2$ de S_4 découpent sur F le système canonique complet.

En particulier, pour $n = 3$, la surface (V_3^3, V_3^3) est canonique et de genres $p_g = p_a = 5$, $p^{(1)} = 10$.

3. Plus généralement considérons dans S_4 l'intersection F de deux hypersurfaces irréductibles et générales V'_3, V''_3 d'ordres n_1, n_2 supérieurs à trois.

La section de F par un hyperplan ξ est une courbe (V'_3, V''_3, ξ) d'ordre $n_1 n_2$ tracée sur la surface (V'_3, ξ) d'ordre n_1. Désignons par Γ les sections planes de cette surface; la courbe envisagée appartient au système $| n_2 \Gamma |$ de (V'_3, ξ). Le système canonique de cette surface est découpé par les surfaces d'ordre $n - 4$ de ξ; par conséquent on a

$$\Gamma' - \Gamma = (n - 4)\Gamma,$$

d'où

$$| (n_2\Gamma)' | = | (n_2 - 1)\Gamma + (n_1 - 3)\Gamma | = | (n_1 + n_2 - 4)\Gamma |.$$

La série canonique de la courbe (V'_3, V''_3, ξ) est donc découpée par les surfaces d'ordre $n_1 + n_2 - 4$ de ξ. Cette série est d'ailleurs complète; la courbe est de genre

$$\frac{1}{2}(n_1^2 n_2 + n_1 n_2^2 - 4 n_1 n_2 + 2)$$

et un calcul facile montre que ce nombre représente aussi celui des surfaces d'ordre $n_1 + n_2 - 4$ linéairement indépendantes, ne contenant pas comme partie l'une des surfaces (V'_3, ξ), (V''_3, ξ).

Cela étant, le système adjoint $| C' |$ au système des sections hyperplanes $|C|$ de F est découpé sur celle-ci par les hypersurfaces d'ordre $n_1 + n_2 - 4$ de S_4. La série découpée par les courbes C' sur une courbe C étant complète, la surface F est régulière.

Le système canonique de F est

$$|C' - C| = |(n_1 + n_2 - 5)C|;$$

il est découpé complètement par les hypersurfaces d'ordre $n_1 + n_2 - 5$ de S_4.

4. Plaçons-nous maintenant dans un espace S_5 et considérons en premier lieu la surface F intersection de deux hyperquadriques V'_4, V''_4 et d'une hypersurface V_4 d'ordre n, irréductibles et générales.

Coupons la surface F par un hyperplan ξ. La courbe (V'_4, V''_4, V_4, ξ) est tracée sur la surface du quatrième ordre (V'_4, V''_4, ξ). Représentons celle-ci sur un plan ω de telle sorte qu'à ses sections hyperplanes correspondent les cubiques passant par cinq points $A_1, A_2, \ldots, A_5$. A la courbe considérée correspond dans ω une courbe d'ordre $3n$ ayant la multiplicité n en $A_1, A_2, \ldots, A_5$. Les adjointes sont d'ordre $3(n-1)$ et ont la multiplicité $n-1$ en $A_1, A_2, \ldots, A_5$. Par suite, la série canonique de la courbe (V'_4, V''_4, V_4, ξ) est découpée sur celle-ci par les hypersurfaces d'ordre $n-1$ de ξ et on montre facilement que cette série est complète.

Cela étant, les hypersurfaces d'ordre $n-1$ de S_5 découpent sur F le système adjoint $|C'|$ au système $|C|$ des sections hyperplanes. La série découpée sur une courbe C par les courbes C' est la série complète, donc la surface F est régulière.

Le système canonique

$$|C' - C| = |(n-2)C|$$

de F est découpé par les hypersurfaces d'ordre $n-2$ de S_5.

En particulier, pour $n = 3$, on obtient une surface canonique, intersection de deux hyperquadriques et d'une hypersurface cubique de S_5. Cette surface a les genres $p_g = p_a = 6$, $p^{(1)} = 13$.

5. Considérons la surface F intersection de trois hypersurfaces V'_4, V''_4, V'''_4 de S_5, d'ordres n_1, n_2, n_3, deux au moins de ces nombres étant supérieurs à deux.

L'intersection de F par un hyperplan ξ est maintenant une courbe

$(V'_4, V''_4, V'''_4, \xi)$ tracée sur la surface (V'_4, V''_4, ξ). Si nous désignons par Γ les sections hyperplanes de cette surface, nous avons vu que son système canonique était

$$|(n_1 + n_2 - 5)\Gamma|.$$

La courbe $(V'_4, V''_4, V'''_4, \xi)$ appartient au système $|n_3\Gamma|$. L'adjoint de ce système est donc

$$|(n_3\Gamma)'| = |(n_1 + n_2 + n_3 - 5)\Gamma|.$$

La surface (V'_4, V''_4, ξ) étant régulière, cet adjoint découpe sur la courbe $(V'_4, V''_4, V'''_4, \xi)$ la série canonique complète. D'autre part, il est découpé par les hypersurfaces d'ordre $n_1 + n_2 + n_3 - 5$ de ξ. Il en résulte que sur la surface F, l'adjoint $|C'|$ du système des sections hyperplanes $|C|$ est découpé par les hypersurfaces d'ordre $n_1 + n_2 + n_3 - 5$ et que, la série découpée par les courbes C' sur une courbe C étant complète, la surface F est régulière.

Le système canonique

$$|C' - C| = |(n_1 + n_2 + n_3 - 6)C|$$

de F est découpé sur cette surface par les hypersurfaces d'ordre $n_1 + n_2 + n_3 - 6$.

6. Les résultats qui viennent d'être obtenus conduisent à supposer que :

La surface F de l'espace S_r, intersection complète de $r - 2$ hypersurfaces irréductibles et générales $V_{r-1}^{(1)}, V_{r-1}^{(2)}, \ldots, V_{r-1}^{(r-2)}$, *respectivement d'ordres $n_1, n_2, \ldots, n_{r-2}$, est régulière et son système canonique est découpé par les hypersurfaces d'ordre*

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_{r-2} - (r + 1).$$

Nous allons supposer que cette proposition est vraie et en déduire la proposition obtenue en remplaçant r par $r + 1$. Comme elle est vraie pour $r = 3, 4$ et 5, elle sera démontrée pour toute valeur de r.

Envisageons, dans l'espace S_{r+1}, $r - 1$ hypersurfaces irréductibles et générales $V_r^{(1)}, V_r^{(2)}, \ldots, V_r^{(r-1)}$, d'ordres $n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}$; soient F leur intersection et C les sections hyperplanes de celle-ci.

Coupons la surface F par un hyperplan ξ. La courbe

$$C \equiv (V_r^{(1)}, V_r^{(2)}, \ldots, V_r^{(r-1)}, \xi)$$

est découpée sur la surface

$$\Phi \equiv (V_r^{(1)}, V_r^{(2)}, ..., V_r^{(r-2)}, \xi)$$

par une hypersurface d'ordre n_{r-1} et appartient donc au système $|n_{r-1}\Gamma|$, Γ étant une section hyperplane de Φ. Le système canonique de Φ étant par hypothèse

$$|(n_1 + n_2 + ... n_{r-2} - r - 1)\Gamma|,$$

l'adjoint du système $|n_{r-1}\Gamma|$ est

$$|(n_{r-1}\Gamma)'| = |(n_1 + n_2 + ... + n_{r-2} + n_{r-1} - r - 1)\Gamma|.$$

Le surface Φ étant régulière par hypothèse, le système précédent découpe la série canonique complète sur la courbe C envisagée. D'autre part, ces courbes sont découpées sur Φ par les hypersurfaces d'ordre $n_1 + n_2 + ... n_{r-1} - r - 1$ de ξ. Il en résulte que le système adjoint $|C'|$ à $|C|$ est découpé sur F par les hypersurfaces d'ordre $n_1 + n_2 + ... + n_{r-1} - r - 1$ et que les courbes C' découpent sur une courbe C la série canonique complète de celle-ci. La surface F est donc régulière et son système canonique

$$|C' - C| = |(n_1 + n_2 + ... n_{r-1} - r - 2)C|$$

est découpé par les hypersurfaces d'ordre $n_1 + n_2 + ... + n_{r-1} - r - 2$. La proposition est donc démontrée.

7. Pour que la surface F possède une courbe canonique d'ordre zéro et soit donc de genres $p_a = P_4 = 1$, on doit avoir

$$n_1 + n_2 + ... + n_{r-2} = r + 1.$$

Les quantités figurant au premier membre étant aux moins égales à deux, on doit avoir $r \leq 5$.

Pour $r = 4$, on a $n_1 = 2$, $n_2 = 3$.

Pour $r = 5$, on a $n_1 = n_2 = n_3 = 2$.

Pour que la surface F soit canonique, on doit avoir

$$n_1 + n_2 + ... n_{r-2} = r + 2,$$

d'où $r \leq 6$.

Pour $r = 4$, on a $n_1 = 2$, $n_2 = 4$ ou $n_1 = n_2 = 3$.

Pour $r = 5$, on a $n_1 = n_2 = 2$, $n_3 = 3$.

Pour $r = 6$, on a $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2$.

Dans ce dernier cas, la surface F a les genres $p_g = p_a = 7, p^{(1)} = 17$.

Liège (Université), le 15 octobre 1941.