COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les points unis des involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(*Troisième communication*)

Dans les deux premières notes [1], nous avons successivement étudié les points unis de première espèce et un point uni de seconde espèce. Rappelons que si V est une variété algébrique à trois dimensions, contenant une involution cyclique I_p d'ordre premier $p = 2\nu + 1$, et si A est un point uni de seconde espèce, la transformation birationnelle de V en soi, génératrice de l'involution, détermine dans la gerbe des tangentes à V en A, une homologie d'axe s et de plan σ. Le cas que nous avons étudié dans notre seconde note supposait que les points infiniment voisins de A dans le plan σ étaient unis parfaits pour l'involution. Si Ω est une variété normale image de l'involution, le point A' homologue du point A est multiple d'ordre $2\nu(\nu + 1) + 1$ pour Ω, le cône tangent étant formé d'un espace linéaire à trois dimensions et d'un cône rationnel d'ordre $2\nu(\nu + 1)$, rencontrant l'espace suivant un plan.

Dans cette nouvelle note, nous considérons le cas où le point infiniment voisin de A sur la droite s est uni parfait pour l'involution et nous établissons le théorème suivant :

[1] BULL. DE L'ACADÉMIE, 1948, pp. 419-425, 518-530.

Si une variété algébrique à trois dimensions contient une involution cyclique d'ordre premier $p = 2\nu + 1$, *possédant un point uni de seconde espèce auquel est infiniment voisin un unique point uni parfait, on peut prendre comme image de l'involution une variété normale pour laquelle le point de diramation correspondant est multiple d'ordre* $\nu^2 + \nu + 1$, *le cône tangent se composant d'un cône d'ordre* ν^2 *et d'un cône d'ordre* $\nu + 1$ *se rencontrant suivant un cône d'ordre* ν. *Le cône d'ordre* ν^2 *projette une surface de Veronese généralisée représentant les courbes d'ordre* ν *d'un plan et le cône d'ordre* $\nu + 1$ *projette une surface réglée.*

Nous conservons les notations de nos deux premières notes et nous utilisons les résultats que nous avons obtenus sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique [1].

1. Soit V une variété algébrique normale à trois dimensions transformée en soi par une homographie cyclique H, de période p, possédant p axes ponctuels $S^{(0)}, S^{(1)}, \ldots, S^{(p-1)}$. Nous supposons p premier et nous posons $p = 2\nu + 1$. Soit I_p l'involution d'ordre p engendrée par H sur V.

Par hypothèse, les points unis de I_p appartiennent à $S^{(0)}$. Aux axes $S^{(0)}, S^{(1)}, \ldots, S^{(p-1)}$ sont respectivement attachés les nombres $1, \epsilon, \ldots, \epsilon^{p-1}$, où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Considérons un point uni A de seconde espèce et soient s, σ la droite et le plan unis dans l'homologie déterminée par H dans la gerbe des tangentes à V en A.

[1] *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient., Paris, Hermann, 1935) ; *Recherches sur les points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (BULLETINS DE L'ACADÉMIE, 1948, pp. 206-228, 290-302 et une troisième note à l'impression) ; *Structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (C. R., 19 juillet 1948, pp. 173-175).

Nous supposerons que le point infiniment voisin de A sur s est uni parfait pour l'involution I_p. On peut toujours supposer que la droite s s'appuie sur l'axe $S^{(1)}$. Alors, le plan σ s'appuie suivant une droite sur l'axe $S^{(2)}$.

Les surfaces F_1, qui sont découpées sur V par les hyperplans contenant $S^{(0)}$, $S^{(2)}, \ldots, S^{(p-1)}$, passent simplement par A en y touchant le plan σ.

Les surfaces F_2, découpées sur V par les hyperplans contenant $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, $S^{(3)}$, ..., $S^{(p-1)}$, passent simplement par A ; le plan tangent en A à une de ces surfaces contient la droite s et coupe σ suivant une droite s_0.

Nous désignerons par F'_0 les surfaces F_0, découpées par les hyperplans contenant $S^{(1)}$, $S^{(2)}, \ldots, S^{(p-1)}$, passant par le point A.

2. Sur une surface F_1, l'homographie H détermine une involution dont A est un point uni parfait. Les surfaces F_0 découpent, sur cette surface F, un système linéaire privé de point-base, appartenant à cette involution. Les surface F'_0 découpent sur la surface F_1 un système linéaire de courbes ayant un point multiple d'ordre p, à tangentes variables, en A.

Considérons maintenant une surface F_2. Sur celle-ci, l'homographie H détermine une involution d'ordre p dont A est un point uni non parfait ayant, dans son domaine du premier ordre, un point uni parfait (sur la droite s). Par conséquent, les surfaces F'_0 découpent, sur cette surface F_2, des courbes ayant en A la multiplicité $\nu + 1$, le point A_1, infiniment voisin de A sur s, étant multiple d'ordre ν pour ces courbes. De plus, ces courbes ont en commun une suite de ν points simples, infiniment voisins successifs de A, le premier se trouvant sur la droite s_0, c'est-à-dire dans σ.

Il en résulte que les surfaces F'_0 ont en A un point multiple d'ordre $\nu + 1$, auquel est infiniment voisin un point A_1, multiple d'ordre ν et qu'elles touchent le plan σ. Le cône tangent à une surface F'_0 en A est donc formé du plan σ et d'un cône d'ordre ν. Le point A_1 étant multiple d'ordre ν, ce cône se décompose nécessairement en ν plans passant par la droite s.

3. Projetons la variété V du point A sur un hyperplan et soit V' la variété obtenue. Au domaine du point A simple pour la variété V, correspond sur V' un plan α. Soient A'_1 le point de α qui correspond au point A_1 et a' la droite du même plan qui correspond au domaine du point A dans le plan σ. A une surface F'_0 correspond sur V' une surface ayant un point multiple conique d'ordre ν en A', coupant le plan α suivant ν droites passant par A'_1 et suivant la droite a'. De plus, les projections des surfaces F'_0 ont encore en commun $\nu - 1$ droites infiniment voisines successives de a'.

Soit C'_0 la courbe commune à deux surfaces F'_0. A cette courbe correspond sur V' une courbe ayant un point multiple d'ordre ν^2 en A'_1. D'autre part, les nappes des surfaces F'_0 tangentes en A au plan σ ont entre elles un contact d'ordre ν, donc le point A est l'origine, sur la courbe C'_0, de $\nu + 1$ branches linéaires tangentesau plan σ. La courbe C'_1 a donc la multiplicité $\nu^2 + \nu + 1$ en A.

4. Soit Ω la variété normale à trois dimensions, image de l'involution I_p, dont les sections hyperplanes Φ_0 correspondent aux surfaces F_0. Appelons Φ_1, Φ_2 les surfaces qui correspondent, sur Ω, respectivement aux surfaces F_1, F_2. Soit en outre A' le point de dirama-tion de Ω qui correspond au point uni A.

Les hyperplans passant par A' coupent la variété Ω suivant les surfaces Φ'_0 qui correspondent aux surfaces F'_0. Aux courbes C'_0 correspondent sur Ω des courbes ayant la multiplicité $\nu^2 + \nu + 1$ en A', donc ce point est multiple d'ordre $\nu^2 + \nu + 1$ pour Ω.

Pour étudier de plus près cette singularité, projetons Ω du point A′ sur un hyperplan de l'espace ambiant et soit Ω' la variété obtenue.

Aux points infiniment voisins de A_1 correspondent sur Ω' les points d'une surface ω_1', d'ordre ν^2.

Aux points du domaine d'ordre $\nu + 1$ de A, infiniment voisins aux points communs aux nappes des surfaces F_0' tangentes au plan σ, correspondent les points d'une surface ω_0', d'ordre $\nu + 1$.

Le cône projetant de A′ les surfaces ω_1', ω_0' est le cône tangent à Ω en A′ ; il se scinde donc en deux cônes ω_1, d'ordre ν^2, et ω_0, d'ordre $\nu + 1$.

5. Une surface Φ_2 possède en A′ un point multiple d'ordre $\nu + 1$, le cône tangent en ce point se composant d'un cône d'ordre ν et d'un plan ayant en commun une droite. Ce cône rencontre la surface ω_1' suivant une courbe rationnelle d'ordre ν et le plan rencontre la surface ω_0' suivant une droite ; cette courbe d'ordre ν et cette droite ont un point commun.

Deux surfaces F_2 ont en commun une courbe ayant un point simple en A et y touchant la droite *s*. Par conséquent, les deux surfaces Φ_2 correspondantes ont en commun une courbe ayant un point simple en A′, sa tangente en ce point appartenant aux deux cônes d'ordre ν tangents en A′ à ces surfaces. On en conclut que les courbes d'ordre ν tracées sur la surface ω_1' forment un réseau homaloïdal et que cette surface représente les courbes d'ordre ν d'un plan ; c'est une surface de Veronese généralisée.

De plus, les droites correspondant, sur la surface ω', aux deux surfaces F_2 envisagées, ne peuvent se rencontrer La surface ω_0' est donc une réglée.

Une surface Φ_1 a en A′ un point multiple d'ordre p à cône tangent rationnel. Ce cône ne peut rencontrer le cône d'ordre ν tangent en A′ à une surface Φ_2, mais rencontre le plan tangent à cette surface en ce point. Ce cône coupe donc la surface ω_0', suivant une courbe rationnelle d'ordre p. Une surface F_1 et une surface F_2 ont en commun une courbe ayant un point simple en A, la tangente en ce point à cette courbe appartenant au plan σ, donc les courbes d'ordre p tracées sur la réglée ω_0' sont des unisécantes des génératrices rectilignes et cette surface est rationnelle.

Comme nous l'avons vu, le cône tangent en A à une surface F' est formé du plan σ et de ν plans passant par s, par conséquent la courbe commune aux surfaces ω_1' et ω_0' est d'ordre ν.

La singularité de la variété Ω en A' est ainsi complètement déterminée.

Liège, le 4 septembre 1948.