Sur les surfaces bicanoniques régulières de genre trois,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Les surfaces dont nous nous occupons dans cette note possèdent, comme système canonique, un réseau de courbes de genre $p^{(1)} = \pi$; on peut donc prendre comme modèle projectif d'une telle surface un plan multiple d'ordre $\pi - 1$ sur lequel les courbes canoniques sont représentées par les droites (multiples). Les coniques (multiples) du plan multiple sont des courbes bicanoniques de celui-ci. Si $\pi > 3$, le bigenre P_2 du plan multiple est supérieur à six et la surface admet comme modèle projectif une surface bicanonique, en général simple, appartenant à un espace linéaire à plus de cinq dimensions. On doit s'attendre à rencontrer, dans la construction de cette surface bicanonique, un cône projetant une surface de Veronese. Précisément, nous établissons le théorème suivant :

Une surface bicanonique régulière, de genres $p_a = p_g = 3$ *et de genre linéaire* $p^{(1)} = \pi$ *supérieur à trois, dont le système canonique n'est pas composé au moyen d'un faisceau et est dépourvu de points-base, appartient à un cône* $V^4_{\pi-1}$ *projetant une surface de Veronese d'un espace linéaire* σ *à* $\pi - 4$ *dimensions. Les courbes canoniques sont découpées par les cônes quadratiques de* $V^4_{\pi-1}$ *projetant de* σ *les coniques de la surface de Veronese.*

La surface appartient à un espace linéaire à $\pi + 2$ *dimensions* $(P_2 = \pi + 3)$ *et est l'intersection du cône* $V^4_{\pi-1}$ *et d'une variété* $V_5^{\pi-1}$ *dont les sections par les espaces à* $\pi - 2$ *dimensions sont des courbes elliptiques.*

Les variétés à courbes-sections elliptiques ont été déterminées par G. Scorza (1); les surfaces F peuvent donc être considérées comme déterminées. Nous signalons celles qui correspondent aux trois premières valeurs de π et pour lesquelles la variété $V_5^{\pi-1}$ n'est pas constituée par une série ∞^1 elliptique d'espaces à quatre dimensions.

Incidemment, nous signalons à la fin du travail un modèle projectif d'une surface normale de genres un $(p_a = P_4 = 1)$ d'un espace à six dimensions et une surface projectivement canonique d'un espace à sept dimensions.

---

(1) Le varietà a curve sezioni ellittiche (*Annali di Matematica*, 1908, 3e série, tome XV, pp. 217-274).

1. Soit F un modèle projectif bicanonique normal d'une surface algébrique régulière de genres $p_a = p_g = 3$. Désignons par $|C|$ le système canonique et supposons qu'il ne soit pas composé au moyen d'un faisceau.

Le système $|C|$ est donc par hypothèse un réseau. Nous désignerons par π le genre des courbes C et $|C|$ aura par suite le degré $p^{(1)} - 1 = \pi - 1$. Le genre linéaire de F est $p^{(1)} = \pi$. Nous supposerons $\pi > 3$.

Le système des sections hyperplanes de F coïncide avec le système bicanonique complet $|2C|$ de F, qui est l'adjoint de $|C|$. Les courbes C ont donc l'ordre $2\pi - 2$.

La surface F étant régulière, l'adjoint $|2C|$ de $|C|$ découpe sur une courbe C la série canonique complète; les courbes C sont donc normales et appartiennent à des espaces linéaires $S_{\pi-1}$ à $\pi - 1$ dimensions.

Le bigenre P_2 de F a pour valeur

$$P_2 = p_a + p^{(1)} = \pi + 3.$$

La surface F est donc immergée dans un espace linéaire S_r à $r = \pi + 2$ dimensions.

Deux courbes canoniques C distinctes doivent déterminer un hyperplan de S_r; donc les espaces $S_{\pi-1}$ qu'elles déterminent ont en commun un espace linéaire $S_{\pi-3}$ à $\pi - 3$ dimensions. On obtient ainsi ∞^2 espaces linéaires $S_{\pi-3}$ formant un système Σ tel que par un point de la surface F passe un seul de ces espaces. La surface F ne peut faire partie de l'enveloppe du système Σ, car alors, toutes les courbes canoniques C auraient au moins un point double variable, ce qui est impossible. Il en résulte que Σ est constitué par les espaces $S_{\pi-3}$ passant par un espace linéaire fixe σ, à $\pi - 4$ dimensions.

Soit S_5 un espace linéaire à cinq dimensions ne rencontrant pas σ. Les espaces $S_{\pi-3}$ de Σ coupent S_5 suivant les points d'une surface Φ. Les espaces $S_{\pi-1}$ des courbes C coupent S_5 suivant des plans; chacun de ces plans coupe Φ suivant une courbe Γ. Les courbes Γ forment un réseau homaloïdal, car deux courbes Γ se coupent en un seul point.

Les hyperplans passant par σ coupent F suivant deux courbes C; par conséquent, ces hyperplans coupent Φ suivant deux courbes Γ. En d'autres termes, les sections hyperplanes de la surface Φ dans S_5 sont les courbes du système $|2\Gamma|$.

Cela étant, rapportons projectivement les courbes Γ aux droites d'un plan ϖ. La surface Φ est représentée biunivoquement sur ce plan et aux sections hyperplanes de Φ correspondent les coniques de ϖ Il en résulte que la surface Φ est une surface de Veronese.

La surface F appartient donc au cône $V^4_{\pi-1}$ projetant de l'espace σ, à $\pi-4$ dimensions, la surface de Veronese Φ. Les courbes canoniques C de F sont découpées par les cônes $V^2_{\pi-2}$ projetant de l'espace σ les coniques de la surface Φ.

2. La surface F est d'ordre $4(\pi-1)$ et ses sections hyperplanes $2C$ ont le genre $3\pi-2$.

Les espaces $S_{\pi-3}$ coupent F suivant des groupes de $\pi-1$ points. Les groupes de $\pi-1$ points situés sur une courbe C forment une série $g^1_{\pi-1}$ semi-canonique.

Le cas le plus simple de la surface F, pour $\pi=4$, est, dans S_6, la section du cône V^4_3 projetant d'un point une surface de Veronese, par une hypersurface cubique. La surface F, d'ordre six, est celle que nous avons appelée surface de Humbert généralisée et que nous avons rencontrée plusieurs fois (²).

Pour $\pi=5$, on obtient, dans S_7, la surface F section du cône V^4_4 projetant d'une droite une surface de Veronese, par deux hyperquadriques. Cette surface est d'ordre seize.

Plus généralement, pour π quelconque (>3), la surface F est découpée sur le cône $V^4_{\pi-1}$ par une variété $V^{\pi-1}_5$, de dimension cinq et d'ordre $\pi-1$.

Les cônes $V^2_{\pi-2}$ de $V^4_{\pi-1}$ coupent la variété $V^{\pi-1}_5$ suivant des courbes de genre π; donc les espaces linéaires $S_{\pi-2}$ de S_2 coupent cette même variété suivant des courbes elliptiques.

Les variétés algébriques à cinq dimensions, à courbes-sections elliptiques, ont été déterminées par G. Scorza (*loc. cit.*). On observera que la variété $V^{\pi-1}_5$ n'est pas nécessairement une variété normale. Il suffira de se reporter au mémoire de Scorza pour énumérer les différentes surfaces F. Nous nous bornerons à mentionner trois des surfaces obtenues.

Considérons, dans un espace linéaire S_9 à neuf dimensions, la variété grassmanienne W^5_6 représentant les droites d'un espace S_4 et le cône V^4_6 projetant d'un espace linéaire à trois dimensions une surface de Veronese. Les variétés W^5_6 et V^4_6 ont en commun

(²) Sur une involution rationnelle douée de trois points de coïncidence appartenant à une surface de genre trois (*Bull. Acad. roy. de Belg.*, 1921, pp. 653-665 et 694-702); Sur une famille de surfaces algébriques de l'espace à six dimensions (*Bull. Soc. Math. de France*, 1925, pp. 484-503); Sur quelques involutions appartenant à la surface de Humbert généralisée (*Bull. Acad. roy. de Belg.*, 1936, pp. 240-251 et 438-446).

une variété V_3^{20} à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces bicanoniques de genres $p_a = p_g = 3$, $P_2 = 9$, $p^{(1)} = 6\,(\pi = 6)$.

Considérons ensuite, dans l'espace S_9, le cône V_6^4 et le cône W_5^6 projetant d'un point la variété de Segre, d'ordre six, représentant les couples de points de deux plans. Ces deux cônes V_6^4 et W_5^6 ont en commun une surface F bicanonique d'ordre 24 et de genres $p_a = p_g = 3$, $P_2 = 10$, $p^{(1)} = 7\,(\pi = 7)$.

Considérons enfin, toujours dans S_9, outre le cône V_6^4 déjà mentionné, le cône W_5^6 projetant d'un point l'intersection des deux variétés suivantes appartenant à un espace S_8 : Un cône projetant d'un plan une surface de Veronese et une hyperquadrique contenant un des cônes du second ordre appartenant à la variété précédente. L'intersection des cônes V_6^4 et W_5^6 est également une surface bicanonique de genres $p_a = p_g = 3$, $P_2 = 10$, $p^{(1)} = 7\,(\pi = 7)$.

3. Nous venons de rencontrer la variété V_3^{20} intersection du cône V_4^6 projetant d'un espace S_3 à trois dimensions une surface de Veronese et de la variété grassmanienne W_6^5, dans l'espace S_9. L'intersection de V_3^{20} et des cônes du second ordre V_5^2 appartenant à V_6^4 sont des surfaces dont les sections hyperplanes sont des courbes canoniques de genre sept. Une telle surface appartient à un espace S_6 à six dimensions et est donc une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), normale.

Plus généralement, nous pouvons remarquer en passant que la variété de l'espace S_9, intersection de la variété grassmanienne représentant les droites d'un espace linéaire à quatre dimensions, avec une hyperquadrique, a pour sections par les espaces linéaires à six dimensions, des surfaces normales de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

On en conclut [3] en outre que l'intersection de la variété W_6^5 par deux hyperquadriques a pour sections par des espaces linéaires à sept dimensions, des surfaces d'ordre vingt dont le système canonique est constitué par les sections hyperplanes (surfaces projectivement canoniques). Ces surfaces ont les genres $p_a = p_g = 8$, $p^{(1)} = 21$.

Liége, le 15 août 1941

---

[3] En vertu d'un théorème de M. Enriques. Voir pp. 337 et 338 des *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, de MM. ENRIQUES et CAMPEDELLI (Padova, 1932).

*