

NOTE A PROPOS DES FORMULES DE FRENET

par. L. GODEAUX

Liège

On sait que par les formules de Frenet, les différentielles des cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale en un point d'une courbe, en axes rectangulaires, s'expriment par des fonctions simples de ces cosinus, des rayons de courbure et de torsion de la courbe et de la différentielle de l'arc.

Rendant compte, dans son *Rapport sur les progrès de la Géométrie* ⁽¹⁾ d'un mémoire de Serret sur les courbes à double courbure (1851) ⁽²⁾, Michel Chasles dit que les formules établies par Serret sont dues à Frenet, qui les a exposées dans une thèse présentée le 10 juillet 1845 à la Faculté des Sciences de Toulouse. Nous ne savons si cette thèse a été publiée. En 1852, Frenet en a publié un extrait dans le *Journal de Liouville*, sans faire allusion à une publication antérieure ⁽³⁾.

Dans une note présentée le 6 mars 1847 à l'Académie royale de Belgique ⁽⁴⁾, Gaspard Pagani ⁽⁵⁾ a donné le premier groupe des formules de Frenet, c'est-à-dire les formules

$$\frac{d\alpha}{\lambda} = \frac{d\beta}{\mu} = \frac{d\gamma}{\nu} = \frac{ds}{\rho},$$

où α, β, γ sont les cosinus directeurs de la tangente, λ, μ, ν ceux de la normale principale, ρ le rayon de courbure et s l'arc de la courbe.

⁽¹⁾ Paris, 1870. pp. 177-178, 283-284.

⁽²⁾ J. A. SERRET, *Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure* (*Journal de Liouville*, 1851, tome XVI, pp. 193-207).

⁽³⁾ M. F. FRENET, *Sur les courbes à double courbure* (*Journal de Liouville*, 1952, tome XVII, pp. 437-447).

⁽⁴⁾ *Bulletin de l'Académie*, 1847, pp. 185-187.

⁽⁵⁾ Gaspard Pagani est né à San-Giorgio (Piémont) le 12 février 1796. L'Université de Turin lui conféra le diplôme d'ingénieur civil et d'architecte hydraulique en 1817. Il quitta son pays et vint à Bruxelles à la fin de 1822. Il fut nommé professeur à l'Université de Louvain en 1825 puis passa à l'université de Liège en 1832, où la Faculté des Sciences de Louvain avait été transférée. Il retourna à Louvain en 1835 comme professeur à l'Université Catholique. Il fut élu à l'Académie en 1825 et mourut en 1855 (Voir la notice de A. Quetelet dans l'Annuaire de l'Académie pour 1856).

En réalité, la démonstration de Pagani n'est pas à l'abri de toute critique car il suppose que les binormales en deux points infiniment voisins de la courbe sont parallèles, bien qu'il suppose que les courbes considérées sont à simple ou à double courbure. Les formules qu'il établit sont valables en un point stationnaire, en lequel le plan osculateur a quatre points d'intersection confondus avec la courbe, ou pour les courbes planes.

Il nous a paru intéressant de signaler cet écrit de Pagani, ce qui ne diminue en rien la priorité de Frenet. D'ailleurs la méthode utilisée par Frenet est différente. Il obtient le premier groupe de formules sous la forme

$$\frac{d\alpha}{\lambda} = \frac{d\beta}{\mu} = \frac{d\gamma}{\nu} = d\omega,$$

où $d\omega$ est l'angle de contingence.

Liège, le 27 avril 1971.