Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 43e année, nº 7-10, 1974, pp. 345-347

SURFACES AYANT DES COURBES CANONIQUES ISOLÉES

par Lucien GODEAUX
Membre de la Société

Nous avons ramené la détermination des surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 2$, à système bicanonique irréductible, à celle de surfaces F, transformées en elles-mêmes par une homographie harmonique, ayant une courbe canonique unique le long de laquelle un hyperplan touche la surface. L'image de l'involution, privée de points unis, engendrée sur F par l'homographie, est une surface Φ de genres $p_a = p_g = 0$ (*). Cette note a pour but de montrer que les conditions imposées à la surface F sont essentielles. Nous construisons en effet une surface invariante pour une homographie harmonique, ayant une seule courbe canonique le long de laquelle un hyperplan touche la surface, l'image de l'involution engendrée sur la surface par l'homographie ayant une courbe canonique.

1. Considérons dans un espace S_4 à quatre dimensions l'homographie harmonique H d'équations

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_0 : x_1 : x_2 : -x_3 : -x_4,$$

ayant pour axes une droite $\sigma_1 (x_0 = x_1 = x_2 = 0)$ et un plan $\sigma_2 (x_3 = x_4 = 0)$.

Soit

$$\varphi_2(x_0, x_1, x_2) + \psi_2(x_3, x_4) = 0$$

l'équation d'une hyperquadrique Q transformée en soi par H, n'ayant aucun point uni, φ_2 et ψ_2 étant des formes quadratiques de leurs arguments.

Soit en outre une hypersurface du sixième ordre d'équation

$$x_0 f_6(x_1, x_2, x_3, x_4) + [f_{12}(x_0, x_1, x_2; x_3, x_4) + f_3(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x)]^2 = 0,$$

où f_6 et f_3 sont des formes de degrés 6 et 3 de leurs arguments et f_{12} une forme du premier degré en x_0, x_1, x_2 dont les coefficients sont des formes du second degré en x_3, x_4 ,ces formes étant transformées en elles-mêmes par H.

Ces deux hypersurfaces ont en commun une surface F d'ordre douze, transformée en elle-même par H et sur laquelle cette homographie engendre une involution I du second ordre, possédant des points unis. Deux de ces points sont sur la droite σ_1,

$$x_0 = x_1 = x_2 = 0, \qquad \psi_2(x_3, x_4) = 0,$$

Manuscrit reçu le 19 septembre 1974.

(*) *Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1965, pp. 25-41); *Surfaces privées de courbe canonique possédant un système bicanonique irréductible* (Convegno intern. di Geometria a celebrazione del centenario della nascità dui Federigo Enriques, 1971).

et six dans le plan σ_2,

$$\varphi_2(0, x_1, x_2, x_3) + \Psi_2(x_3, x_4) = 0,$$

$$f_{12}(0, x_1, x_2, x_3, x_4) + f_3(0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

L'hyperplan $x_0 = 0$ touche la surface F le long de la courbe d'intersection.

2. On sait que dans l'espace à trois dimensions $x_0 = 0$, l'intersection d'une quadrique et d'une surface cubique est une courbe de genre quatre dont la série canonique est découpée par les plans. Il en résulte que la section C_1 de la surface F par l'hyperplan $x_0 = 0$ a pour adjoint le système des sections hyperplanes $|C_2|$ de la surface F.

D'autre part on a

$$C_2 \equiv 2C_1$$

et par suite

$$C_2' \equiv C_1 + C_1' \equiv C_1 + C_2,$$

d'où

$$C_2' - C_2 \equiv C_1.$$

La courbe C_1 est donc la courbe canonique de F et est unique. La surface F étant régulière, a les genres $p_a = p_g = 1$.

Le système

$$|C_2| = |2C_1|$$

est le système bicanonique de la surface F.

3. Désignons par Φ une image de l'involution I. Pour obtenir un modèle projectif de cette surface, considérons les hyperquadriques de S_4 transformées en elles-mêmes par H et ne passant pas par les axes de cette homographie. En en déduisant l'hyperquadrique Q, on obtient un système dépendant de huit paramètres homogènes. En rapportant projectivement ces hyperquadriques aux hyperplans d'un espace S_7 à sept dimensions, on obtient pour Φ une surface normale d'ordre 24.

A la courbe C_1 correspond sur Φ uen courbe Γ_1 d'ordre 12 et, la courbe C_1 passe par les deux points unis de I situés sur la droite σ_1, donc par la formule de Zeuthen, la courbe Γ_1 a le genre deux.

Considérons les hyperplans de S_4 passant par la droite σ_1. Ils découpent sur F des courbes parmi lesquelles se trouve la courbe $2C_1$. Les courbes Γ_2 qui leur correspondent sur Φ sont des courbes $\Gamma_2 = 2\Gamma_1$. Les ∞^1 de ces courbes qui ne contiennent pas la courbe $2\Gamma_1$ découpent sur celle-ci la série canonique. On a donc

$$\Gamma_1' \equiv \Gamma_2.$$

Il en résulte que l'on a

$$\Gamma_2' \equiv \Gamma_1 + \Gamma_1' \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2, \quad \Gamma_2' - \Gamma_2 \equiv \Gamma_1$$

et que la courbe Γ_1 est la courbe canonique de la surface Φ.

Le système $|\Gamma_2|$ est le système bicanonique de Φ.

Aux sections de F par les hyperplans passant par le plan σ_2 correspondent sur Φ des courbes Γ_2^+ de genre quatre ne rencontrant plus la courbe Γ_1 en des points variables.

4. La surface Φ contient une seule courbe canonique Γ_1 et a le genre $p'_a = 1$. Entre le genre arithmétique $p_a = 1$ de F et celui p'_a de Φ on a d'ailleurs la relation

$$12(p_a + 1) = 2 \, . \, 12(p'_a + 1) - 3 \, . \, 8,$$

ce qui est une identité.

L'involution I possédant huit points uni, la surface Φ possède huit points doubles coniques.

Les courbes Γ_2 passent simplement par deux de ces points et les courbes Γ_2^+ passent par six de ces points. La courbe Γ_1 passe simplement par les huit points doubles.

Notons que les courbes C_2 ont le genre dix.

Liège, le 22 août 1974.