

## SUR UN FAISCEAU DE SURFACES DU SIXIÈME ORDRE

par Lucien Godeaux (Liège)

Nous nous proposons de construire un faisceau de surfaces du sixième ordre découpant, sur tout plan de l'espace, un faisceau de sextiques de HALPHEN. Ces surfaces ont donc nécessairement en commun une courbe double du neuvième ordre, courbe-base du faisceau.

Nous commençons par construire une surface du sixième ordre  $F$  ayant une courbe double du neuvième ordre  $D$ . Une telle surface est rationnelle et, ses sections planes étant elliptiques, elle est représentée sur un plan par un système linéaire triplement infini de cubiques planes ayant trois points-base. Nous utilisons dans ce but les méthodes de CAPÔRALI <sup>1)</sup>. Nous montrons que la surface  $F$  possède quatre points triples, triples également pour la courbe  $D$ . Nous démontrons ensuite que la courbe  $D$  appartient à une surface cubique  $\Phi$ . Cela nous permet de démontrer l'existence de la surface  $F$ , ce que nous ramenons à la construction d'une surface du sixième ordre touchant  $\Phi$  le long de la courbe  $D$ .

Le faisceau déterminé par la surface  $F$  et la surface  $\Phi$  comptée deux fois découpe, sur tout plan de l'espace, un faisceau de sextiques de HALPHEN.

1. Soit, dans un plan  $\sigma$ ,  $|\gamma|$  un système linéaire triplement infini de cubiques planes ayant trois points-base  $A_1, A_2, A_3$  non en ligne droite.

Rapportons projectivement les courbes  $\gamma$  aux plans de l'espace. Aux points du plan  $\sigma$  correspondent les points d'une surface  $F$ , du sixième ordre, dont les sections planes sont elliptiques et qui par conséquent possède une courbe double  $D$  du neuvième ordre.

La première polaire d'un point  $P$  quelconque de l'espace est une surface du cinquième ordre passant par la courbe  $D$  et coupant encore  $F$  suivant la courbe  $K$  de contact du cône de sommet  $P$  circonscrit à  $F$ . A la section de  $F$  par cette polaire correspond donc, dans  $\sigma$ , la courbe  $\Delta$  image de la courbe  $D$  et une courbe  $K'$ ,

<sup>1)</sup> Sopra i sistemi lineari triplemente infiniti di curve algebriche piane (Collectanea Mathematica in memoriam Dominici Chelini, Milan, 1881; Memorie di Geometria, Naples, 1888).

jacobienne du réseau des courbes  $\gamma$  homologues des sections planes de  $F$  dont les plans passent par  $P$ . Cette jacobienne est une courbe  $\gamma_j$  du sixième ordre passant deux fois par chacun des points  $A_1, A_2, A_3$ . D'autre part, la courbe  $\gamma_j + \Delta$  doit appartenir au système  $|5\gamma|$ , dont les courbes, du quinzième ordre, passent cinq fois par les points  $A_1, A_2, A_3$ . Il en résulte que la courbe  $\Delta$  est d'ordre neuf et passe trois fois par chacun des points  $A_1, A_2, A_3$ .

Entre la courbe  $D$  et la courbe  $\Delta$ , il existe une correspondance (1, 2) et les courbes  $\gamma$  passant par un point de  $\Delta$  passent en conséquence par un second point de cette courbe.

Considérons deux réseaux  $|\gamma'|, |\gamma''|$  tirés de  $|\gamma|$ ; ils ont en commun un faisceau  $|\gamma'''|$ . Soient  $\gamma'_j, \gamma''_j$  les jacobienues de  $|\gamma'|$  et de  $|\gamma''|$ . Les courbes  $\gamma'_j, \gamma''_j$  ont en commun les trois points  $A_1, A_2, A_3$ , comptant chacun pour quatre intersections; les douze points doubles pour une courbe du faisceau  $|\gamma'''|$ . Les  $36 - 3 \cdot 4 - 12 = 12$  points restants sont doubles pour les courbes d'un faisceau de  $|\gamma|$  et appartiennent à toutes les jacobienues des réseaux de  $|\gamma|$ . On sait (CAPORALI) que ces points appartiennent à  $\Delta$  et qu'il leur correspond, sur  $D$ , les points-pince de la surface  $F$ .

Une jacobienne  $\gamma_j$  coupe  $\Delta$  aux points  $A$ , aux 12 points qui viennent d'être rencontrés et aux points homologues des points de rencontre de la courbe  $K$  avec  $D$ . Ces points sont donc au nombre de  $6 \cdot 9 - 3 \cdot 2 - 12 = 24$ . En un de ces points, un des plans tangents à  $F$  passe par  $P$  et par conséquent ce point appartient à la seconde polaire de  $P$  par rapport à  $F$ . Cette seconde polaire coupe  $D$  aux 24 points qui viennent d'être rencontrés et, éventuellement, aux points triples de la courbe  $D$ , triples également pour la surface  $F$ . Il en résulte que ces points triples sont au nombre de quatre.

*La surface  $F$ , du sixième ordre, possède une courbe double  $D$  d'ordre neuf et quatre points triples à la fois pour la courbe et pour la surface.*

Nous désignerons ces quatre points doubles par  $M_1, M_2, M_3, M_4$ .

2. Coupons la surface  $F$  par un plan  $a$ . Il existe une cubique passant par les neuf points d'intersection de  $D$  avec  $a$  et cette cubique ne rencontre plus la surface en dehors de  $D$ . Il ne peut exister une infinité de pareilles cubiques dans le plan  $a$ , car alors, à la section de  $F$  par ce plan, section qui serait nécessairement formée de deux cubiques, correspondrait une cubique  $\gamma_0$  décomposée en deux courbes rencontrées chacune par les autres courbes  $\gamma$  en trois points en dehors des points  $A$ . La courbe  $\gamma_0$  ne pourrait se décomposer qu'en une conique passant par les trois points  $A$

et en une droite. Or, à cette conique et à cette droite correspondent sur  $F$  des cubiques gauches. On voit donc que tout plan  $a$  contient une cubique bien déterminée, s'appuyant en neuf points sur la courbe  $D$ .

Faisons tourner le plan  $a$  autour d'une droite  $a$ . Le lieu des cubiques s'appuyant en neuf points sur  $D$  et situées dans ces plans  $a$  est une surface  $\Phi$ , d'ordre  $3 + n$ , passant  $n$  fois par  $a$ . Mais si  $n$  n'est pas nul, cela signifie que par tout point de la droite  $a$  passe au moins une des cubiques en question. En particulier, par un point de rencontre de  $a$  et de  $F$  passe une de ces cubiques, qui appartient donc à  $F$ . Ceci est en contradiction avec ce qu'on vient d'établir, donc  $n = 0$  et  $\Phi$  est une surface cubique. Cette surface cubique ne rencontre plus la surface  $F$  en dehors de  $D$  et est donc unique.

De plus, la surface  $\Phi$  a nécessairement quatre points doubles en  $M_1, M_2, M_3, M_4$ , puisque ces points sont triples pour  $D$ .

*La courbe double  $D$  de  $F$  appartient à une surface cubique pour laquelle les points triples de  $D$  sont doubles.*

3. Représentons la surface  $\Phi$  sur un plan  $\pi$  de telle sorte qu'à ses sections planes correspondent les cubiques circonscrites à un quadrilatère complet. Désignons par  $a_1, a_2, a_3, a_4$  les côtés de ce quadrilatère, par  $A_{ik}$  le sommet intersection des côtés  $a_i, a_k$ .

Aux domaines des points doubles  $M_1, M_2, M_3, M_4$  de la surface  $\Phi$  correspondent respectivement dans  $\pi$  les droites  $a_1, a_2, a_3, a_4$ .

A la section de  $\Phi$  par  $F$  correspond dans  $\pi$  une courbe d'ordre dix-huit passant six fois par chacun des points  $A_{ik}$ . Comme  $F$  passe trois fois par le point  $M_i$ , la droite  $a_i$  intervient comme composante triple dans cette courbe. En d'autres termes, la courbe se compose de chacune des droites  $a_i$  comptée trois fois et d'une courbe du sixième ordre ne passant par aucun des sommets du quadrilatère complet. Cette courbe du sixième ordre correspond à la courbe  $D$ , mais comme cette courbe est double pour  $F$ , la courbe du sixième ordre se réduit à une cubique comptée deux fois.

Appelons  $D'$  cette cubique. Elle est elliptique et par conséquent il en est de même de la courbe  $D$ .

Nous avons vu que  $D$  représentait une involution du second ordre appartenant à la courbe  $\Delta$  et que, d'autre part,  $F$  possède 12 points-pince sur  $D$ . Dans la correspondance (1, 2) existant entre  $D$  et  $\Delta$ , il y a donc 12 points de diramation. La courbe  $\Delta$  est du neuvième ordre, possède trois points triples  $A_1, A_2, A_3$  et 12 points doubles correspondants aux quatre points triples de  $D$ ; elle est

donc de genre sept. La formule de Zeuthen, appliquée à la correspondance entre  $D$  et  $A$ , donne

$$4(1-1) + 12 = 2(7-1),$$

ce qui est bien une identité.

4. Soit  $\Psi$  une surface cubique distincte de  $\Phi$ , passant simplement par les points  $M_1, M_2, M_3, M_4$ . Les surfaces  $F, \Phi + \Psi$  déterminent un faisceau de surfaces du sixième ordre,  $|F'|$ , tangentes à  $\Phi$  le long de la courbe  $D$  et ayant des points triples en  $M_1, M_2, M_3, M_4$ .

Inversement, soit  $F'$  une surface du sixième ordre tangente à  $\Phi$  le long de la courbe  $D$  et ayant des points triples en  $M_1, M_2, M_3, M_4$ . Elle détermine, avec la surface  $\Phi + \Psi$  un faisceau de surfaces  $|F'|$  se raccordant à  $\Phi$  le long de  $D$ . Nous allons voir que l'on peut disposer de la surface  $\Psi$  pour que ce faisceau contienne une surface  $F$  ayant la courbe  $D$  comme courbe double.

La première polaire d'un point quelconque  $P$  par rapport à  $\Phi$  est une quadrique passant par  $M_1, M_2, M_3, M_4$  et coupant encore  $D$  en  $2 \cdot 9 - 4 \cdot 3 = 6$  points. Par conséquent la développable circonscrite à  $\Phi$  le long de  $D$  est de classe six.

La première polaire du point  $P$  par rapport à  $F'$  est une surface du cinquième ordre passant deux fois par les points  $M_1, M_2, M_3, M_4$  et coupant encore  $D$  en  $5 \cdot 9 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 21$  points. Puisque  $F'$  touche  $\Phi$  le long de  $D$ , parmi ces points se trouvent les six points en lesquels les plans tangents à  $\Phi$  et à  $F'$  passent par  $P$ . En chacun des quinze points restants, le plan tangent à  $F'$  doit être indéterminé et ces points sont donc doubles pour  $F'$ .

Ainsi, chaque surface du faisceau  $|F'|$  possède quinze points doubles sur la courbe  $D$ . Nous désignerons par  $G$  le groupe des 15 points doubles d'une de ces surfaces. En général, ce groupe  $G$  varie avec la surface.

Soient  $R$  un point de  $D$ ,  $r$  une droite passant par  $R$  mais n'y touchant pas les surfaces  $\Phi, F'$ . Il existe une surface du faisceau  $|F'|$  touchant en  $R$  la droite  $r$  et ayant par conséquent un point double en  $R$ . Par conséquent, les groupes  $G$  des différentes surfaces de  $|F'|$  forment une série d'indice un. D'autre part cette série est rationnelle, puisqu'il y a une correspondance biunivoque entre les groupes  $G$  et les surfaces  $F'$  du faisceau. Il en résulte que les groupes  $G$  forment sur  $D$  une série linéaire  $g_{15}^1$ .

Observons que le groupe  $G$  de la surface  $\Phi + \Psi$  est formé par les 15 points d'intersection de  $\Psi$  avec la courbe  $D$  en dehors des points  $M_1, M_2, M_3, M_4$ . Les groupes  $G$  appartiennent donc à la

série linéaire  $g_{15}^{14}$  découpée sur  $D$  par les surfaces cubiques passant par les points  $M$  et distinctes de  $\Phi$ .

Cela étant, reprenons une surface  $F'$  et considérons la surface cubique  $\Psi$ , distincte de  $\Phi$ , passant par les points  $M$  et par 14 des 15 points du groupe  $G$  de cette surface  $F'$ . La surface  $\Psi$  passe en conséquence par le 15e point du groupe  $G$  et par suite la surface  $F'$  et la surface  $\Phi + \Psi$  déterminent un faisceau  $|F'|$  de surfaces se raccordant le long de  $D$ , ayant des points triples en  $M_1, M_2, M_3, M_4$  et quinze points doubles fixes sur la courbe  $D$ .

Il existe une surface  $F$  de ce faisceau touchant en un point  $R$  de  $D$  une droite  $r$  non tangente à  $\Phi, F'$  en ce point. Cette surface a un point double en  $R$  et par conséquent la première polaire d'un point quelconque par rapport à  $F$  passe par  $R$  et contient la courbe  $D$ ; celle-ci est donc double pour  $F$ .

Ainsi donc, s'il existe une surface  $F'$  touchant  $\Phi$  le long de  $D$ , il existe une surface  $F$  passant doublement par  $D$ , les quatre points  $M$  étant triples pour les deux surfaces.

5. Nous allons maintenant prouver l'existence d'une surface du sixième ordre ayant des points triples aux points  $M$  et touchant  $\Phi$  le long d'une courbe  $D$ , elliptique, d'ordre neuf, ayant également des points triples aux points  $M$ .

A cet effet, considérons, dans un plan  $\omega$ , l'involution d'ordre deux,  $I_2$ , engendrée par la transformation quadratique  $T$ , d'équations

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2x_3 : x_3x_1 : x_1x_2.$$

Nous avons montré que l'on peut prendre, comme surface image de cette involution, une surface cubique ayant quatre points doubles coniques<sup>1)</sup>. Considérons les cubiques du plan  $\omega$  passant par les sommets du triangle de référence. Elles forment un système linéaire de dimensions six, transformé en lui-même par  $T$  et contenant deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution  $I_2$ . Les équations de ces systèmes peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \lambda_1(x_2 + x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2) + \lambda_2(x_2 - x_3)(x_3 + x_1)(x_1 - x_2) \\ + \lambda_3(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 + x_2) \\ + \lambda_4(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mu_1(x_2 - x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2) + \mu_2(x_2 + x_3)(x_3 - x_1)(x_1 + x_2) \\ + \mu_3(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 - x_2) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Sur l'inversion et sur une surface cubique à quatre points doubles (Mathesis, 1922). Voir aussi notre exposé sur Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (Paris, Hermann, 1935).

Rapportons projectivement les courbes du premier de ces systèmes aux plans de l'espace en posant

$$\begin{aligned}\varrho X_1 &= (x_2 + x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2), \\ \varrho X_2 &= (x_2 - x_3)(x_3 + x_1)(x_1 - x_2), \\ \varrho X_3 &= (x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 + x_2), \\ \varrho X_4 &= (x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2).\end{aligned}$$

En éliminant les  $x$  entre ces équations, on obtient l'équation

$$X_2 X_3 X_4 + X_3 X_4 X_1 + X_4 X_1 X_2 + X_1 X_2 X_3 = 0$$

de la surface image de  $I_2$ . Les sommets du tétraèdre de référence sont doubles pour cette surface et nous pouvons la prendre comme surface  $\Phi$ .

Les courbes du système (2) passent par les points unis

$$(1, 1, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)$$

de  $I_2$ . Il leur correspond sur  $\Phi$  des cubiques gauches. Le long de chacune de ces dernières, il existe une cône du second ordre inscrit dans la surface  $\Phi$ . Ce cône a pour équation

$$\begin{aligned}\mu_1^2 (X_2 X_3 + X_2 X_4 + X_3 X_4) + \mu_2^2 (X_1 X_3 + X_1 X_4 + X_3 X_4) \\ + \mu_3^2 (X_1 X_2 + X_1 X_4 + X_2 X_4) \\ - 2(\mu_2 \mu_3 X_1 + \mu_3 \mu_1 X_2 + \mu_1 \mu_2 X_3) X_4 = 0.\end{aligned}$$

Considérons maintenant les courbes du neuvième ordre passant trois fois par les sommets du triangle de référence; elles forment un système linéaire de dimension 36, transformé en lui-même par  $T$ . Ce système contient deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution  $I_2$ . L'un a pour homologue sur  $\Phi$  le système découpé par les surfaces cubiques distinctes de  $\Phi$  et a donc la dimension 18. L'autre a la dimension 17; ses courbes passent simplement par les quatre points unis de l'involution  $I_2$ . Considérons les courbes de ce système qui, en chaque point uni, touchent trois droites fixes; elles forment un système linéaire de dimension  $17 - 12 = 5$ . L'équation

$$\begin{aligned}\mu_1 (x_2 - x_3)^3 (x_3 + x_1)^3 (x_1 + x_2)^3 + \mu_2 (x_2 + x_3)^3 (x_3 - x_1)^3 (x_1 + x_2)^3 \\ + \mu_3 (x_2 + x_3)^3 (x_3 + x_1)^3 (x_1 - x_2)^3 = 0\end{aligned}$$

représente une de ces courbes, irréductible. A cette courbe correspond sur  $\Phi$  une courbe du neuvième ordre appartenant à la surface

$$\begin{aligned} & \mu_1^2 (X_2X_3 + X_2X_4 + X_3X_4)^3 + \mu_2^2 (X_1X_3 + X_1X_4 + X_3X_4)^3 \\ & + \mu_3^2 (X_1X_2 + X_1X_4 + X_2X_4)^3 \\ & - 2 [\mu_2\mu_3X_1^3 + \mu_3\mu_1X_2^3 + \mu_1\mu_2X_3^3] X_4^3 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Si nous supposons  $\mu_1$  variable, l'enveloppe de la famille de surfaces représentées par l'équation (3) est la surface  $\Phi$ , donc la surface (3) touche la surface  $\Phi$  en chaque point d'intersection. Les sommets du tétraèdre de référence sont triples pour la surface (3), donc la courbe de contact de cette surface avec  $\Phi$  a quatre points triples et peut être prise pour courbe  $D$ . La surface (3) est une surface  $F'$ . L'existence de la surface  $F$  est ainsi assurée.

6. Reprenons la surface  $F$  passant doublement par  $D$  et la surface  $\Phi$  passant par cette courbe. La surface  $F$  et la surface  $\Phi$  comptée deux fois déterminent un faisceau de surfaces du sixième ordre,  $|F|$ , ayant la courbe double  $D$  et les points triples  $M_1, M_2, M_3, M_4$ .

Sur un plan quelconque de l'espace, les surfaces du faisceau  $|F|$  découpent un faisceau de sextiques de HALPHEN.

Observons que sur un plan passant par un des points  $M$ , les surfaces  $F$  découpent un faisceau de HALPHEN particulier. Le point  $M$  considéré est triple pour la surface  $F$  et quadruple pour la surface  $\Phi$  comptée deux fois, donc, pour les sections du plan envisagé par les surfaces de  $|F|$ , il est triple à tangentes fixes. On voit donc que dans un faisceau de sextiques de HALPHEN, trois points doubles peuvent être remplacés par un point triple à tangentes fixes.

Liège, le 26 mai 1946.