ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Estratto dai *Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali*

Serie VIII, vol. XLI, fasc. 5 – Novembre 1966

Géométrie. — *Une démonstration nouvelle d'un théorème de F. Enriques.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Enriques ha dimostrato che la superficie generale del sest'ordine passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro, la quale ha i generi $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$ ed una curva bicanonica d'ordine zero, è immagine di un'involuzione del secondo ordine, senza punti uniti, appartenente ad una superficie di generi $p_a = P_4 = 1$, con curva canonica d'ordine zero. Si dà qui una nuova dimostrazione di questo teorema mediante costruzione della seconda superficie.

Lorsque Castelnuovo entreprit la recherche des conditions de rationnalité d'une surface algébrique, Enriques lui signala l'existence de la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre et triplement par les sommets, surface ayant les genres $p_a = p_g = 0$ et possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro ($P_2 = 1$) [1]. Plus tard, Enriques a démontré que toute surface de genres $p_a = p_g = 0$ possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro pouvait se ramener, par une transformation birationnelle, à la surface précédente [2]. Plus tard encore, Enriques [3] a démontré que la surface du sixième ordre considérée était l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface régulière possédant une courbe canonique d'ordre zéro ($p_a = P_4 = 1$). C'est de ce théorème que nous voudrions donner une nouvelle démonstration, assez simple, donnant la construction de la surface support de l'involution.

Voici vingt ans que Federigo Enriques s'éteignait, le 14 juin 1946. Il laissait une oeuvre magistrale non seulement en Géométrie, mais aussi en Histoire des Sciences et en Philosophie. Qu'il nous soit permis de saluer ici la mémoire de notre vénéré Maître.

1. F. Enriques a démontré que toute surface de genres $p_a = p_g = 0$ possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro, peut se ramener par une transformation birationnelle à la surface Φ générale du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre et dont l'équation peut s'écrire.

$$f_2(x_2 x_3 x_4\,, x_3 x_4 x_1\,, x_4 x_1 x_2\,, x_1 x_2 x_3) + x_1 x_2 x_3 x_4\, \varphi_2(x_1\,, x_2\,, x_3\,, x_4) = 0,$$

où f_2 et φ_2 sont des formes quadratiques de leurs arguments.

Les sections planes Γ_1 de la surface Φ sont de genre quatre. Les adjointes Γ_2 au système $|\Gamma_1|$ sont des courbes de genre quatre découpées sur Φ

(*) Nella seduta del 12 novembre 1966.

par les surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre des droites doubles. Les courbes Γ_1 sont à leur tour les adjointes des courbes Γ_2 et on a

$$|2\Gamma_1| = |2\Gamma_2|,$$

la surface Φ ayant le diviseur de Severi $\sigma = 2$.

2. Ces points rappelés, considérons dans un espace linéaire S_7 à 7 dimensions deux espaces σ, σ' à trois dimensions ne se rencontrant pas.

Dans l'espace σ, nous considérerons une surface d'Enriques Φ passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$. Rapportons projectivement les surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$ aux plans de l'espace σ'. Nous obtenons ainsi une transformation birationnelle T entre les espaces σ et σ'. Aux plans de σ correspondent les surfaces cubiques circonscrites à un tétraèdre $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4$ et à la surface Φ correspond dans σ' une surface d'Enriques Φ' passant doublement par les arêtes de ce tétraèdre.

Désignos par Γ_1 les sections planes de Φ et par Γ_2 leurs adjointes. Aux courbes Γ_1 correspondent sur Φ' les courbes Γ'_1 découpées par les surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4$ et aux courbes Γ_2 les sections planes Γ'_2 se Φ'.

3. Nous allons considérer la variété lieu des droites rencontrant Φ et Φ' en des points qui se correspondent dans T.

Un hyperplan de S_7 passant par une courbe Γ_1 coupe la courbe homologue Γ'_1 en six points, il contient donc six droites passant par des points homologues de Γ_1, Γ'_1. La surface lieu de ces droites passe simplement par Γ_1 et c'est par conséquent une surfaces V_2^{12} d'ordre 12 située dans un hyperplan passant par σ'.

De même, le lieu des droites s'appuyant en des points homologues sur deux courbes Γ_2, Γ'_2 qui se correspondent dans T est une surface $V_2'^{12}$ située dans un hyperplan passant par σ.

Un hyperplan passant par σ coupe σ' suivant una courbe Γ'_2 et contient donc la surface $V_2'^{12}$ relative à cette courbe. Cet hyperplan coupe donc la variété lieu des droites passant par des points homologues de Φ, Φ' suivant cette surface. D'autre part, cette variété passe simplement par la surface Φ. C'est donc une variété V_3^{18} d'ordre 18.

4. Soit $\varphi_2 = 0$ l'équation d'une quadrique de σ passant par les points A_1, A_2, A_3, A_4. La transformation T lui fait correspondre une quadrique de σ' passant par les points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 d'équation $\varphi'_2 = 0$. La quadrique $\varphi_2 = 0$ coupe Φ suivant une courbe g et la quadrique $\varphi_2 = 0$ coupe Φ' suivant la courbe g' que T lui fait correspondre. Les courbes g, g' sont d'ordre 12 et la surface lieu des droites joignant leurs points homologues est une surface V_2^{24} d'ordre 24.

L'hyperquadrique Q de S_7 d'équation

$$\varphi_2 + \varphi'_2 = 0$$

coupe la variété V_3^{18} suivant une surface formée de la réglée V_2^{24} et d'une surface F d'ordre 12.

Les droites de V_3^{18} coupent F suivant des couples de points formant une involution I dont Φ et Φ' sont des images.

5. L'homographie biaxiale harmonique de S_7, H, ayant pour axes σ et σ', transforme la surface F en elle-même et détermine sur cette surface l'involution I. Il en résulte que si cette involution possède des points unis, ils appartiennent à σ ou σ', c'est-à-dire à Φ ou Φ'.

Soit P un point uni de I appartenant à la surface Φ. C'est un point de diramation pour la correspondance (1, 2) existant entre Φ et F. Son homologue P' sur la surface Φ' est également un point de diramation pour la correspondance (1, 2) entre Φ' et F et par suite c'est un point uni de l'involution I. Mais alors, dans la correspondance entre Φ et F, au point de diramation P correspondraient deux points P, P', ce qui est absurde puisque I est d'ordre deux. On en conclut que l'involution I est dépourvue de points unis.

Cela étant, entre le genre arithmétique $p'_a = 0$ de Φ et celui p_a de F, on a la relation

$$p_a + 1 = 2(p'_a + 1),$$

d'où $p_a = 1$.

6. Les surfaces V_2^{12} découpent sur la surface F des courbes C, homologues des courbes Γ_1, situées dans des hyperplans passant par φ'. Elles ont l'ordre 12 le genre sept d'après la formule de Zeuthen.

Les surfaces $V_2'^{12}$ découpent sur la surface F des courbes C' qui correspondent aux courbes Γ'. Elles sont situées dans des hyperplans passant par σ, ont l'ordre 12 et le genre sept.

Les courbes C appartiennent à un système linéaire $|C|$ de dimension

$$r \geq p_a + 12 - 7 + 1,$$

c'est-à-dire $r \geq 7$. Les courbes Γ_1 étant les adjointes aux courbes Γ_2, les courbes C découpent sur une courde C' des groupes canoniques d'ordre 12. La série canonique de la courbe C' ayant la dimension six, on a $r = 7$ et il existe une courbe C qui coincide avec la courbe C' considérée.

Les systèmes $|C|$ et $|C'|$ coincident en un système unique qui est son propre adjoint et la surface F possède une courbe canonique d'ordre zéro. Elle a donc les genres $p_a = P_4 = 1$. Le théorème d'Enriques est démontré.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero* («Memorie della Società dei XL», 1894–1896); *Opere*, pp. 307–334. Dans ce mémoire, Castelnuovo indique aussi une surface non rationelle de genres $p_a = p_g = 0$.

[2] ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno* («Memorie della Società dei LX», 1906); *Opere*, tome II, pp. 241–272.

[3] ENRIQUES, *Un'osservazione relativa alla superficie di bigenere uno* («Rendiconto della Accademia di Bologna», 1908); *Memorie*, tome II, pp. 303–306.

ROMA, 1967 — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei