Surfaces algébriques s'osculant le long de courbes

par LUCIEN GODEAUX (Liège)

Nous nous proposons, dans cette courte note, d'indiquer la construction de couples de surfaces ayant un contact de second ordre le long d'une courbe, comme application de nos recherches sur les involutions appartenant à une surface algébrique (1). Nous indiquons en terminant une généralisation de nos résultats.

1. — Soit, dans un espace projectif S_5, à cinq dimensions, dont les coordonnées ponctuelles sont $x_0, x_1, ..., x_5$, une surface F d'équations

$$x_4^3 = \alpha_3 (x_0, x_1, x_2, x_3), \quad x_5^3 = \beta_3 (x_0, x_1, x_2, x_3),$$
$$x_4 x_5 = \gamma_2 (x_0, x_1, x_2, x_3),$$

où α_3, β_3, γ_2 sont des formes algébriques dont le degré est indiqué par l'indice.

La surface F est transformée en elle-même par l'homographie H, de période trois,

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' : x_4' : x_5' = x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : \varepsilon x_4 : \varepsilon^2 x_5,$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité.

Les axes ponctuels de l'homographie sont l'espace S_3 d'équation $x_4 = x_5 = 0$ et les points 0_4 (0, 0, 0, 0, 1, 0), 0_5 (0, 0, 0, 0, 0, 1).

Sur la surface F, H détermine une involution I de troisième ordre, n'ayant comme points unis que les dix-huit points d'intersection de la surface avec l'axe ponctuel S_3. On obtient un modèle projectif de la surface F', image de l'involution I, en projetant F de $0_4 0_5$ sur S_3, c'est-à-dire en éliminant x_4, x_5 entre les équations de la surface. On trouve ainsi, pour équation de la surface F',

$$\alpha_3 \beta_3 = \gamma_2^3.$$

La surface F' est donc du sixième ordre ; elle possède dix-huit points doubles biplanaires ordinaires aux points d'intersection des surfaces

$$\alpha_3 = 0, \quad \beta_3 = 0, \quad \gamma_2 = 0.$$

Ces points correspondent aux points unis de l'involution I et sont les points de diramation de la correspondance (1, 3) existant entre les surfaces F' et F.

En un tel point, les plans tangents à la surface sont les plans tangents aux surfaces $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = 0$.

Observons que la surface $\alpha_3 = 0$ a un contact du second ordre avec F' le long de la courbe $\alpha_3 = \gamma_2 = 0$ et que, de même, la surface $\beta_3 = 0$ a un contact du second ordre avec F' le long de $\beta_3 = \gamma_2 = 0$.

3. — Considérons, dans S_5, les hyperquadriques transformées en elles-mêmes par l'homographie H. Elles forment trois familles ; l'une a pour équation

$$\sum_{i,k=0}^{3} \lambda_{ik} x_i x_k = 0 \tag{1}$$

et est formée d'hyperquadriques qui ne passent pas par les points unis de l'involution I. Les deux autres sont données par

$$\lambda x_4^2 + x_5 \varphi_1 (x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{2}$$
$$u x_5^2 + x_4 \psi_1 (x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{3}$$

où φ_1, ψ_1 sont des formes linéaires à coefficients variables. Les hyperquadriques de ces deux dernières familles passent par les points unis de l'involution I.

Ces trois familles d'hyperquadriques découpent sur F trois systèmes linéaires de courbes $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$ appartenant à l'involution I et à ces trois systèmes correspondent sur F' trois systèmes linéaires complets $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$ de courbes.

Aux courbes C_0 correspondent évidemment sur F' les courbes C_0' découpées par les quadriques de S_3. Nous étudierons les courbes C_1' qui correspondent sur F' aux courbes C_1 découpées sur F par les hyperquadriques (2).

On obtient les équations de la courbe C_1' en multipliant successivement les deux membres de l'équation (2) par x_4 et par x_5^2. On obtient ainsi

$$\lambda_0\,\alpha_3 + \gamma_2\,\varphi_1 = 0,$$
$$\lambda_0\,\gamma_2^2 + \beta_3\,\varphi_1 = 0.$$

Les équations de la courbe C_1' peuvent donc s'écrire

$$\left\|\begin{matrix} \alpha_3 & \gamma_2^2 & -\varphi_1 \\ \gamma_2 & \beta_3 & \alpha_0 \end{matrix}\right\| = 0.$$

C'est une courbe du douzième ordre.

D'autre part, on élevant au cube les deux membres de l'quation (2), on obtient

$$\lambda_0^3\,\alpha_3^2 + 3\,\lambda_0^2\,\alpha_3\,\gamma_2\,\varphi_1 + 3\,\lambda_0\,\gamma_2^2\,\varphi_1^2 + \beta_3\,\varphi_1 = 0, \tag{4}$$

surface qui, d'après la théorie des involutions, oscule la surface F' le long de la courbe C_1'.

3. — La surface (4), du douzième ordre, possède une courbe double

$$\alpha_3 = 0,\ \varphi_1 = 0\ ;$$

c'est une cubique plane en chaque point de laquelle les deux plans tangents à la surface sont confondus avec le plan tangent à $\alpha_3 = 0$.

Considérons la développable Δ lieu des plans tangents aux surfaces F' et (4) aux points de la courbe C_1'. Pour obtenir la classe de Δ, considérons la première polaire d'un point M par rapport à F'. C'est une surface du cinquième ordre qui passe par les dix-huits points doubles biplanaires de F' ; ces points appartenant à C_1', cette première polaire rencontre encore cette courbe en 42 points. Par conséquent, la développable Δ est de classe 42.

Reprenons le même raisonnement en substituant à F' la surface (4). La première polaire de M par rapport à (4) est une surface du cinquième ordre passant par la cubique plane double de la surface. Elle rencontre donc encore la courbe C_1 en 48 points. Ces points sont en général simples pour la surface F' et en six d'entre eux, le plan tangent à la surface (4) doit être indéterminé, sans quoi Δ serait de classe supérieure à 42. Soit P un des six points en question.

Le plan tangent en P à (4) étant indéterminé, ce point est en général double pour la surface. Traçons sur la surface (4) un arc de courbe χ passant simplement par P. Puisque les surfaces F' et (4) s'osculent en P, χ doit rencontrer F' en trois points confondus en P, donc la tangente à χ en P est également tangente à F'. Il en résulte que le plan tangent à F' en P est tangent à la surface (4) et celle-ci possède donc en P un point double biplanaire.

La surface (4), du sixième ordre, oscule la surface F' le long de la courbe du douzième ordre C_1' et possède six points doubles biplanaires sur cette courbe.

On obtient naturellement des résultats analogues en partant de l'équation (3).

4. — Considérons de même dans S_5 l'hypersurface

$$\lambda_0\,x_4^2\,x_5 + x_5^2\,\varphi_1 + x_4\,\varphi_2 = 0, \tag{5}$$

où φ_1, φ_2 sont des formes en x_0, x_1, x_2, x_3 de degré indiqué par l'indice.

A la section D de F par cette variété correspond sur F' une courbe D' appartenant aux surfaces

$$\lambda_0\,\alpha_3\,\gamma_2 + \varphi_1\,\gamma_2^2 + \alpha_3\,\varphi_2 = 0,$$
$$\lambda_0\,\gamma_2^2 + \varphi_1\,\beta_3 + \varphi_2\,\gamma_2 = 0.$$

Les équations de la courbe D' peuvent donc s'écrire

$$\left\|\begin{matrix} \alpha_3 & \gamma_2 & -\varphi_1 \\ \gamma_2^2 & \beta_3 & \lambda_0\,\gamma_2 + \varphi_2 \end{matrix}\right\| = 0.$$

C'est une courbe d'ordre dix-huit passant par les dix-huit points doubles biplanaires de F'.

En élevant au cube les deux membres de l'équation (5), on obtient une surface du neuvième ordre

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_0^3\,\alpha_3^2\,\beta_3 + \varphi_1^3\,\beta_3^2 + \alpha_3\,\varphi_2^3 \\ &+ 3\,(\lambda_0^2\,\varphi_1\,\alpha_3\,\beta_3 + \varphi_1^2\,\varphi_2\,\beta_3 + \lambda_0\,\varphi_2^2\,\alpha_3)\,\gamma_2 \\ &+ 3\,(\lambda_0^2\,\varphi_2\,\alpha_3 + \lambda_0\,\varphi_1^2\,\beta_3 + \varphi_1\,\varphi_2^2)\,\gamma_2^2 \\ &+ 6\,\lambda_0\,\varphi_1\,\varphi_2\,\alpha_3\,\beta_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

qui oscule la surface F' le long de la courbe D'.

La surface (6) est dépourvue de courbes multiples, mais si l'on reprend le raisonnement fait plus haut, on voit qu'elle possède, sur la courbe D', 72 points doubles biplanaires ordinaires.

La surface (6), du neuvième ordre, oscule la surface F' le long de la courbe du dix-huitième ordre D' et possède 72 points doubles biplanaires ordinaires sur cette courbe.

5. — On peut étendre ce qui précède de la manière suivante :

Considérons un espace linéaire S_{p+2} à $p+2$ dimensions dont les coordonnées ponctuelles sont $x_0, x_1, \dots, x_{p+2}$ et, dans cet espace, l'homographie

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{x_3} = \frac{x'_{3+i}}{\varepsilon^i x_{3+i}}, \qquad (7)$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité et où i prend les valeurs $1, 2, \dots, p-1$.

Cette homographie a pour axes ponctuels l'espace S_3 d'équations

$$x_4 = x_5 = \dots = x_{p+2} = 0$$

et les sommets $0_4, 0_5, \dots, 0_{p+2}$ de la figure de référence.

Considérons ensuite une surface F ayant pour équations

$$\left.\begin{array}{l} x_4^p = \alpha_1(x_0, x_1, x_2, x_3), \; x_5^p = \alpha_2(x_0, x_1, x_2, x_3), \\ \quad \dots, x_{p+2}^p = \alpha_{p-1}(x_0, x_1, x_2, x_3), \\ \alpha_1 x_4 x_{p-1} + \lambda_2 x_5 x_{p-2} + \\ \qquad \dots + \varphi(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0. \end{array}\right\} \qquad (8)$$

où les α sont des formes de degré p et φ une forme quadratique en x_0, x_1, x_2, x_3.

Cette surface F est transformée en soi par l'homographie (7) et celle-ci détermine sur la surface une involution I d'odre p privée de points unis si $p > 3$.

On obtient une surface F' image de l'involution I en éliminant $x_4, x_5, \dots, x_{p+2}$ entre les équations (8). Cette surface est d'ordre $2 \, . \, p^{p-2}$.

On peut aisément obtenir des surfaces ayant un contact d'ordre $p-1$ avec la surface F' le long de courbes. Il suffit de partir de l'équation d'une hypersurface transformée en elle-même par l'homographie (7) et dont l'équation se reproduit précisément multipliée par une puissance de ε non congrue à zéro mod. p, lorsque l'on effectue la substitution (7).

Actuellement, si $p > 3$, la surface F' possède une nouvelle propriété : son diviseur de Severi est $\sigma = p$, comme cela résulte d'un théorème que nous avons établi autrefois [2].

Liège, le 16 mai 1950.

---

[1] *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* Actualités scient., n° 270, Paris, Hermann, 1935.

[2] *Sur certaines surfaces de diviseur supérieur de l'unité.* Bull. de l'Acad. des Sc. de Cracovie, 1914, pp. 362-368 ; *Applications de la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* Colloque de Géométrie algébrique tenu à Liège, 1949, pp. 177-195.