Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples

par M. L. Godeaux (Liège)

Voici quarante ans que nous avons entrepris l'étude des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique. A cette époque, F. Enriques et F. Severi venaient de publier leur beau *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*, qui obtint le Prix Bordin en 1907 (1). Dans la seconde partie de ce Mémoire, les auteurs étudiaient les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface de Jacobi. Au cours d'un séjour que nous fîmes à Bologne en 1912, notre regretté Maître Federigo Enriques nous engagea à étudier les involutions de même nature appartenant à une surface de genres 1 ($p_a = P_4 = 1$). Nous étudiâmes également les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface de bigenre 1 ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$). Nous avons ensuite abordé l'étude des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique quelconque. Nos recherches sur cet objet, à peu près interrompues par la guerre, ne purent être reprises qu'en 1920.

Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. On construit sur F un système linéaire complet $|C|$ transformé en lui-même par la transformation birationnelle T de F en soi, génératrice de l'involution I, et contenant p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution, l'un d'eux étant dépourvu de points-base. En rapportant projectivement les courbes de ce dernier système aux hyperplans d'un espace linéaire ayant le même nombre de dimensions, il correspond à F une surface normale Φ image de l'involution, c'est-à-dire une surface dont chaque point correspond à un groupe de l'involution.

(1) *Acta Mathematica*, 1909, t. 32, pp. 283-392; t. 33, pp. 341-399.

Considérons un point uni O de l'involution et soit O' le point de diramation qui lui correspond sur Φ. Dans le domaine du premier ordre de O, T peut déterminer soit l'identité, soit une involution d'ordre p. Dans le premier cas, nous disons que O est un point uni de première espèce, dans le second, que c'est un point uni de seconde espèce. Lorsque O est uni de première espèce, le point de diramation O' est multiple d'ordre p pour Φ et le cône tangent à cette surface en ce point est rationnel et irréductible.

Supposons que O soit un point uni de seconde espèce. Nous avons alors nécessairement $p > 2$. Dans le domaine du premier ordre de O, l'involution d'ordre p déterminée par T possède deux éléments unis. Si nous transformons birationnellement F en une surface F' sur laquelle au point O correspond une courbe exceptionnelle γ, à l'involution I correspond une involution I' possédant deux points unis sur γ. On peut recommencer le raisonnement précédent sur chacun de ces points et ainsi de suite. On voit donc que O est le pied d'une sorte d'arbre dont les nœuds sont des points unis de l'involution. Aux sections hyperplanes de Φ passant par O' correspondent sur F des courbes ayant une certaine multiplicité en O et passant par un certain nombre de nœuds de cet arbre. Ce nombre est évidemment fini et les nœuds qui terminent les branches appartenant aux courbes en question sont unis de première espèce pour l'involution.

Le problème qui se pose est la détermination de l'arbre des points unis et la nature de la singularité du point de diramation O' pour la surface Φ. La question est beaucoup plus complexe que dans le cas où F est hyperelliptique, ou de genres 1 ($p_a = P_4 = 1$) ou de bigenre 1 ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$), car alors la surface Φ ne peut posséder que des points doubles. Au contraire, si F est quelconque, le point O' peut avoir une multiplicité quelconque pour Φ. Un exemple est fourni dans le cas où F est un plan, l'involution étant engendrée par une homographie cyclique T ne possédant que trois points unis. On peut alors traiter la question par un calcul simple, mais très long dans la plupart des cas.

Dans le cas d'une surface F quelconque, nous avons traité le problème de la manière suivante : Si ε, η sont des racines primitives d'ordre p de l'unité, l'involution déterminée par T dans le domaine du premier ordre de O peut être représentée soit par

$$\lambda' : \mu' = \lambda : \varepsilon^{\alpha-1}\mu ,$$

soit par

$$\lambda' : \mu' = \eta^{\beta-1}\lambda : \mu ,$$

les deux entiers α, β donnant $\alpha\beta - 1$ multiple de p.

Appelons C_0 les courbes C qui correspondent aux sections hyperplanes de Φ et C_0' les courbes C_0 passant par O (qui correspondent donc aux sections de Φ par les hyperplans passant par O'). Les courbes C_0' ont la multiplicité $\lambda_1+\mu_1$ en O, λ_1 tangentes en ce point étant confondues avec une des directions unies et μ_1 avec l'autre direction unie parmi les directions issues de O. Les nombres λ_1, μ_1 satisfont aux congruences

$$\lambda+\alpha\mu\equiv 0\,, \qquad \mu+\beta\lambda\equiv 0\,, \qquad (\text{mod. } p)$$

et $\lambda_1+\mu_1$ est la plus petite parmi les sommes analogues.

On a donc

$$\lambda_1+\alpha\mu_1=hp\,, \qquad \mu_1+\beta\lambda_1=h'p$$

et les points unis de seconde espèce peuvent se partager en trois catégories :

a) On a $h=1$, $h'=1$;

b) Un seul des nombres h, h' est égal à l'unité ;

c) Les nombres h, h' sont tous deux supérieurs à l'unité.

Nous avons étudié ces questions dans un mémoire en cours d'impression et avons démontré que le cône tangent à Φ en O' se décompose en deux, trois ou quatre cônes rationnels suivant que O est de la première, de la seconde ou de la troisième catégorie. Nous exposons dans cette note la démonstration de ce théorème, sous une forme un peu différente, bien qu'identique au fond, de celle que nous avons utlisée dans notre mémoire.

A la fin de cette note, on trouvera l'indication de quelques-uns des travaux que nous avons publiés sur la question qui nous occupe.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I, d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous pouvons supposer que F appartient, comme surface normale, à un espace linéaire S_r, de dimension r, aussi grande qu'on le veut, et que l'involution I est engendrée par une homographie T de S_r, possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ dont un seul, σ_0, rencontre F, aux points unis de l'involution. De plus, on peut toujours supposer que la dimension r_0 de σ_0 est aussi grande qu'on le veut.

Désignons par $|C|$ le système linéaire complet des sections hyperplanes de F, par $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{p-1}|$ les sections par les hyperplans passant par les axes de l'homographie T sauf respectivement par $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$.

En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions, il correspond à F une surface Φ image de l'involution I. Nous désignerons par $|\Gamma_0|$ le système des sections hyperplanes de Φ, par $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, ..., $|\Gamma_{p-1}|$ les systèmes linéaires qui correspondent sur Φ respectivement aux systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_{p-1}|$. Si n est l'ordre de Φ et π le genre des courbes Γ_0, la surface F est d'ordre 1 et ses sections hyperplanes C sont de genre $p(\pi-1)+1$.

Soit O un point uni de l'involution I. Par hypothèse, il appartient à l'espace σ_0. Nous supposerons en outre que le point O est simple pour la surface F.

Le plan tangent ω à F en O ne coupe σ_0 qu'au point O. Ce plan est uni pour l'homographie T et par conséquent il s'appuie suivant une droite sur l'un des espaces σ_1, σ_2, ..., σ_{p-1}, ou suivant un point sur deux de ces espaces. Dans le premier cas, nous disons que O est un *point uni de première espèce*, dans le second que O est un *point uni de seconde espèce*. Nous ne nous occuperons ici que de ces derniers.

A chacun des espaces σ_0, σ_1, ..., σ_{p-1}, nous pouvons attacher, suivant la méthode habituelle, une racine primitive d'ordre p de l'unité. Si ε est une de ces racines, nous supposerons qu'à l'espace σ_i est attachée la racine ε^i.

2. Supposons que O soit un point uni de seconde espèce. Le plan tangent ω à F en O s'appuie en un point sur deux des espaces σ_1, σ_2, ..., σ_{p-1}. On peut toujours supposer que l'un de ces espaces est σ_1, en changeant éventuellement de notation. Nous désignerons par O_1 le point d'appui de ω sur σ_1. Supposons que ω s'appuie en outre en un point O_α sur l'espace σ_α. Observons que l'on a nécessairement $p>2$, car les points unis des involutions du second ordre sont nécessairement tous de première espèce.

Rapportons le plan ω au triangle OO_1O_α ; l'homographie déterminée dans ce plan par T a pour équations

$$x_0' : x_1' : x_\alpha' = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^\alpha x_\alpha .$$

Désignons par C_0' les courbes C_0 assujetties à passer par O ; elles ont en ce point λ_1 tangentes confondues avec OO_α, μ_1 confondues avec OO_1 et la multiplicité $\lambda_1+\mu_1$ en O. Désignons ensuite par C_0'' les courbes C_0' assujetties à toucher en O une droite distincte de OO_1, OO_α ; elles ont en ce point λ_2 tangentes confondues avec OO_α, μ_2 confondues avec OO_1 et la multiplicité $\lambda_2+\mu_2$ en O. Et ainsi de suite. On parviendra finalement à des courbes $C_0^{(\nu+1)}$ ayant en O la multiplicité p et des tangentes variables. Nous avons montré que l'on a $p=2\nu+1$.

Quant aux nombres λ_1, μ_1 ; λ_2, μ_2 ; ..., ils satisfont à la congruence

$$\lambda+\alpha\mu\equiv 0, \qquad (\text{mod. } p) \qquad\qquad (1)$$

et l'on a évidemment

$$\lambda_1 + \mu_1 < \lambda_2 + \mu_2 < \ldots < \lambda_\nu + \mu_\nu < p .$$

Considérons les courbes C_1 découpées sur F par les hyperplans passant par σ_0, σ_2, σ_3, ..., σ_{p-1} ; elles ont un point simple en O et y touchent la droite OO_α. Elles rencontrent chacune des courbes C_0', C_0'', ..., $C_0^{(\nu+1)}$ en un certain nombre de points confondus en O et ce nombre doit être multiple de p. Il atteint son maximum pour les courbes $C_0^{(\nu+1}$ et pour ces courbes il est égal à p. On en conclut qu'il est égal à p pour toutes les courbes.

Ainsi, les courbes C_0', C_0'', ..., $C_0^{(\nu+1)}$ rencontrent les courbes C_1 en p points confondus en O. De même, ces courbes rencontrent les courbes C_α, qui passent simplement par O en y touchant la droite OO_1, en p points confondus en O.

3. Les courbes C_1 rencontrent les courbes C_0' en p points confondus en O ; or ces dernières courbes ont en O une multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$ inférieure à p, donc il faut que les courbes C_1 et C_0' aient en commun un certain nombre de points fixes infiniment voisins successifs de O. Nous désignerons ces points par (1, 1), (1, 2), ..., (1, k). Ces points sont unis pour l'involution, puisque les courbes C_1, C_0' sont unies.

De même, les courbes C_α ont en commun avec les courbes C_0' un certain nombre de points fixes communs, infiniment voisins successifs de O, unis pour l'homographie T. Nous les désignerons par (α, 1), (α, 2), ..., (α, k').

On en conclut que les courbes C_0' ont en commun un ensemble de points fixes du domaine de O. Parmi ces points se trouvent les points des suites précédentes et, éventuellement, des suites de points infiniment voisins successifs de quelque point d'une de ces suites. On peut dire que les points fixes communs à toutes les courbes C_0' dans le voisinage de O forment une sorte d'arbre ayant ce point pour pied. Chaque nœud de cet arbre est l'origine de deux branches ou termine une branche. Tous les points envisagés sont nécessairement unis pour l'involution.

Soit P un point du voisinage de O qui termine une branche de cet arbre. Le point P est commun à toutes les courbes C_0', mais les points de ces courbes infiniment voisins de P sont variables avec ces courbes. Comme il existe une infinité de courbes C_0' passant par un de ces points, celui-ci est uni pour l'involution I. En d'autres termes, les points infiniment voisins de P sont tous unis pour I et le point P est uni de première espèce.

Un raisonnement analogue peut être fait pour les courbes C_0'', C_0''', ...

Désignons par O' le point de diramation de Φ homologue du point O. Aux courbes C_0' correspondent sur Φ les sections de cette surface par les hyperplans passant par O' ; nous les désignerons par Γ_0'. Si nous projetons Φ du point O' sur un hyperplan de l'espace ambiant ne passant pas par O', nous obtenons une surface Φ_1 dont les sections hyperplanes Γ_0' correspondent aux courbes C_0'. Aux points unis de première espèce qui appartiennent à toutes les courbes C_0' correspondent sur Φ_1 des courbes rationnelles qui, projetées de O', donnent le cône tangent à la surface Φ au point O'.

En particulier, aux domaines des points $(1, k)$, (α, k') correspondent des courbes rationnelles σ_1, σ_α (notations qu'il ne faut évidemment pas confondre avec celles qui ont été utilisées plus haut et dont il ne sera plus question). Ces courbes ont respectivement pour ordres les multiplicités des points considérés pour les courbes C_0'.

Aux courbes C_1, C_α correspondent sur Φ des courbes Γ_1, Γ_α qui passent simplement par le point O. Sur Φ_1, elles ont pour projections des courbes que nous désignerons par les mêmes symboles ; les courbes Γ_1 rencontrent la courbe σ_1 en un point variable et les courbes Γ_α, la courbe σ_α en un point variable également.

4. La congruence (I) admet la solution

$$\lambda^* = p - \alpha , \qquad \mu^* = 1$$

et les courbes C_0^* correspondantes ont la multiplicité $p - \alpha + 1$ au point O. Elles passent nécessairement simplement par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., (α, k') et la somme des multiplicités de ces courbes en ces points, augmentée de la multiplicité en O, doit être égale à p. On en conclut $k' = \alpha - 1$.

Observons que si l'on pose $\eta = \varepsilon^\alpha$, il existe un entier β, compris entre 1 et p, tel que l'on a

$$\eta^\beta = \varepsilon .$$

Les nombres λ, μ satisfont à la congruence

$$\mu + \beta\lambda \equiv 0 , \qquad (\text{mod. } p) \tag{II}$$

et cette congruence admet la solution

$$\lambda = 1 , \qquad \mu = p - \beta .$$

Les courbes correspondantes passent $p - \beta + 1$ fois par O et une fois par les points $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, k)$. On en conclut $k = \beta - 1$.

Les courbes C_α *ont en commun, avec les courbes* C_0', *une* *suite de* $\alpha-1$ *points* $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$ ..., $(\alpha, \alpha-1)$, *infiniment voisins successifs de* O *et les courbes* C_1 *ont en commun, avec les mêmes courbes* C_0', *une suite de* $\beta-1$ *points* $(1, 1)$ $(1, 2)$, ..., $(1, \beta-1)$ *infiniment voisins successifs de* O.

Les sommes des multiplicités des courbes C_0' *d'une part aux points* O, $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha-1)$, *d'autre part aux points* O, $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, \beta-1)$, *sont égales à* p.

Les solutions λ, μ d'une des congruences (I), (II) satisfont à l'autre, On en conclut que le nombre $\alpha\beta-1$ est multiple de p.

5. Lorsque l'on a

$$\lambda_1+\alpha\mu_1=p\,,$$

les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha-1)$ sont multiples d'ordre μ_1 pour les courbes C_0' et la courbe σ_α est une courbe rationnelle d'ordre μ_1.

Supposons que l'on ait

$$\lambda_1+\alpha\mu_1=hp\,,$$

avec $h>1$. Les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha-1)$ ne peuvent plus être multiples d'ordre μ_1 pour les courbes C_0' ; supposons que le point $(\alpha, \alpha-1)$ soit multiple d'ordre μ_1' pour les courbes C_0' et soient $\mu_1'+x_1$, $\mu_1'+x_2$, ..., $\mu_1'+x_{\alpha-2}$ les multiplicités des points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha-2)$ pour les mêmes courbes. On a d'ailleurs

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_{\alpha-2} \geqq 0\,.$$

Nous devons avoir

$$\lambda_1+\mu_1+(\alpha-1)\,\mu_1'+\sum_1^{\alpha-2} x_i=p\,.$$

Posons

$$\mu_1=\mu_1'+x_0\,,\quad \mu^*=\mu_1'\,,\quad \lambda^*=\lambda_1+\sum_0^{\alpha-2} x_i\,.$$

On a

$$\lambda^*+\alpha\mu^*=p$$

et par conséquent il existe un système $|C_0^*|$ dont les courbes ont la multiplicité $\lambda^*+\mu^*$ en O et la multiplicité $\mu^*=\mu_1'$ aux points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha-1)$.

Sur la surface Φ_1, la courbe σ_α a l'ordre $\mu^*=\mu_1'$ et les courbes $\Gamma_0^{(i)}$, qui correspondent aux courbes $C_0^{(i)}$, dans l'hypothèse où l'on a

$$\lambda_i+\mu_i<\lambda^*+\mu^*\,,$$

rencontrent la courbe σ_α en μ_1' points.

6. Supposons toujours que l'on ait

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = hp\,, \qquad (h > 1)\,.$$

Si λ_i, μ_i est une solution de la congruence (I) telle que

$$\lambda_i + \mu_i < \lambda^* + \mu^*\,,$$

il y a nécessairement des points de la suite $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 2)$ qui ont une multiplicité supérieure à μ_1'. Il en résulte qu'il y a sur chaque courbe $C_0^{(i)}$ une ou plusieurs branches superlinéaires, d'origine O, passant par le point $(\alpha, 1)$ au moins.

Chacun des points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 2)$ est uni de seconde espèce et le point (α, k) par exemple, possède dans son domaine du premier ordre deux points unis : l'un est le point $(\alpha, k+1)$; nous désignerons l'autre par $(\alpha, k, 1)$.

Cela étant, supposons que les courbes $C_0^{(i)}$ passent z_{k-1} fois par le point $(\alpha, k-1)$, z_k fois par le point (α, k), z_{k+1} fois par le point $(\alpha, k+1)$, mais ne passent pas par le point $(\alpha, k-1, 1)$.

Dans ces conditions, le point $(\alpha, k, 1)$ sera multiple d'ordre $z_k - z_{k+1}$ pour les courbes $C_0^{(i)}$. D'une manière plus précise, si nous posons

$$z_{k-1} = z_k + \theta_1(z_k - z_{k+1}) + z_k'\,, \qquad z_k' < z_k - z_{k+1})\,,$$

les courbes $C_0^{(i)}$ passeront $z_k - z_{k+1}$ fois par θ_1 points $(\alpha, k, 1)$, $(\alpha, k, 2)$, ..., (α, k, θ_1) infiniment voisins successifs de (α, k) et z_k' fois par le point $(\alpha, k, \theta_1 + 1)$ infiniment voisin de (α, k, θ_1). Posons ensuite

$$z_k - z_{k+1} = \theta_2 z_k' + z_k''\,.$$

Les courbes $C_0^{(i)}$ passent z_k' fois par les points $(\alpha, k, \theta_1 + 1, 1)$ $(\alpha, k, \theta_1 + 1, 2)$, ..., $(\alpha, k, \theta_1 + 1, \theta_2)$ infiniment voisins successifs de $(\alpha, k, \theta_1 + 1)$ et z_k'' fois par un point $(\alpha, k, \theta_1 + 1, \theta_2 + 1)$ infiniment voisins de $(\alpha, k, \theta_1 + 1, \theta_2)$.

Et ainsi de suite jusqu'au moment où l'on arrivera à une suite de points tous de même multiplicité. Celle-ci sera égale au plus grand commun diviseur des nombres

$$z_{k-1} - z_k\,, \qquad z_k - z_{k+1}\,.$$

Les points ainsi obtenus appartiennent à toutes les courbes $C_0^{(i)}$, ils sont par suite nécessairement unis de seconde espèce pour l'involution, sauf le dernier, qui est uni de première espèce.

Nous avons supposé que le point $(\alpha, k-1, 1)$ n'appartenait pas aux courbes $C_0^{(i)}$. S'il en était autrement et si le point $(\alpha, k-1, 1)$ était précisément multiple d'ordre z'_{k-1}

pour ces courbes, le raisonnement précédent pourrait être repris en remplaçant z_{k-1} par $z_{k-1} - z'_{k-1}$.

7. Appliquons le raisonnement précédent aux courbes C_0'. Sur chacune de ces courbes, le point O peut être l'origine de plusieurs branches superlinéaires passant par des séries de points fixes se terminant à des points $P_1, P_2, \ldots, P_\eta$ respectivement multiples d'ordres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\eta$ pour les courbes C_0'.

Ces points sont unis de première espèce pour l'involution et à leurs domaines du premier ordre correspondent respectivement sur la surface Φ_1 des courbes $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\eta$ respectivement $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\eta$.

Aux courbes C_0'', C_0''', ... correspondent sur Φ_1 des courbes Γ_0', Γ_0'', ... dont les nombres de points de rencontre variables avec les courbes $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\eta$ iront en diminuant. Les courbes Γ_0'' seront découpées sur Φ_1 par les hyperplans passant par un point fixe d'une des courbes $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\eta$, par exemple par un point A_1' de τ_1. Les courbes $\Gamma_0^{(1)}$ seront découpées par les hyperplans touchant la courbe τ_1 en A_1', et ainsi de suite.

On arrivera finalement aux courbes Γ_0^*, homologues des courbes C_0^*, qui rencontrent τ_1 en ν_1 points confondus en A_1', τ_2 en ν_2 points confondus en un point A_2', ..., τ_η en ν_η points confondus en un point A_η'.

Désignons par $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ la solution de la congruence (I) telle que la somme $\bar{\lambda} + \bar{\mu}$ soit immédiatement inférieure à $\lambda^* + \mu^*$.

Les courbes $\bar{C}_0$ correspondant à cette solution auront pour homologues sur Φ_1 des courbes $\bar{\Gamma}_0$ rencontrant $\eta - 1$ des courbes $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\eta$ en des points fixes et la dernière, par exemple τ_η, en $\nu_\eta - 1$ points confondus en A_η' et en un point variable.

On en conclut que sur les courbes $\bar{C}_0$, le point O est l'origine d'une seule branche superlinéaire ayant comme point simple P_η. Par conséquent, les courbes $\bar{C}_0$ passeront $\bar{\mu}$ fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., (α, x), y fois par le point $(\alpha, x+1)$ et μ_1' fois par les points $(\alpha, x+2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$. On aura évidemment

$$\bar{\mu} > y > \mu'.$$

Comme la somme des multiplicités des courbes $\bar{C}_0$ aux points O, $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$ doit être égale à p, on aura

$$\bar{\lambda} + (x+1)\bar{\mu} + y + (\alpha - 2 - x)\mu_1' = p,$$

c'est-à-dire

$$x(\bar{\mu} - a) + y = p - \bar{\lambda} - \bar{\mu} - (\alpha - 2)\mu_1'.$$

Les nombres $\bar{\mu} - y$ et $y - \mu_1'$ doivent être premiers entre eux.

8. Soit maintenant $\bar{\bar{\lambda}}, \bar{\bar{\mu}}$ la solution de la congruence (I) telle que la somme $\bar{\bar{\lambda}} + \bar{\bar{\mu}}$ soit immédiatement inférieure à $\bar{\lambda} + \bar{\mu}$.

Les courbes correspondantes $\bar{\bar{C}}_0$ ou bien passent deux fois par le point P_η, ou bien passent une fois par le point P_η et une fois par un autre des points $P_1, P_2, \ldots, P_\eta$, par exemple par $P_{\eta-1}$.

Dans les deux cas, le nombre des tangentes en O aux courbes $\bar{\bar{C}}_0$ confondues avec la droite OO_1 sera supérieur au nombre des tangentes aux courbes $\bar{C}_0$ au même point confondues avec la même droite.

En effet, dans le premier cas, le point $(\alpha, x+1)$ aura certainement une multiplicité pour les courbes $\bar{\bar{C}}_0$ supérieure à celle de courbes $\bar{C}_0$; il en sera de même par conséquent des multiplicités de ces courbes aux points (α, x), $(\alpha, x-1)$, ..., $(\alpha, 1)$.

Dans le second cas, la branche superlinéaire d'origine O des courbes $\bar{\bar{C}}_0$ passant par le point $P_{\eta-1}$, se détache de la suite $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha-2)$ en un point (α, x_1+1). Si $x_1 > x$, le point $(\alpha, x+1)$ aura une multiplicité supérieure à $\bar{\mu}$ pour les courbes $\bar{\bar{C}}_0$. Si $x_1 < x$, le point (α, x_1+1) aura, pour les courbes $\bar{\bar{C}}_0$, une multiplicité supérieure à $\bar{\mu}$.

Dans l'hypothèse où l'on aurait soit $x = 0$, soit $x_1 = 0$, le raisonnement reste le même, en tenant compte des multiplicités des points $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$, ... pour les courbes considérées.

Dans tous les cas, on a $\bar{\bar{\mu}} > \bar{\mu}$.

Le même raisonnement peut aussi être tenu quand on passe des courbes $C_0^{(i+1)}$ aux courbes $C_0^{(i)}$ dans l'hypothèse où la somme $\lambda_i + \mu_i$ est immédiatement inférieure à $\lambda_{i+1} + \mu_{i+1}$. On a alors

$$\mu_i > \mu_{i+1} .$$

On en conclut que si l'on place les sommes $\lambda + \mu$ des solutions de la congruence (I) donnant

$$\lambda + \mu < \lambda^* + \mu^* ,$$

par ordre de sommes croissantes, les valeurs de μ vont en décroissant.

9. Posons

$$p = a\alpha + b , \qquad (b < \alpha) .$$

Parmi les solutions de la congruence (I), rangées par ordre de croissance de la somme $\lambda+\mu$, la première pour laquelle on a $\lambda+\alpha\mu=p$ est évidemment $\lambda=b$, $\mu=a$. On a donc

$$\lambda^*=b\,, \qquad \mu^*=\mu_1'=a\,.$$

Par conséquent, on a

$$\lambda_1=b-\sum_0^{\alpha-2}x_i\,, \quad \mu_1=a+x_0\,.$$

De

$$\lambda_1+\alpha\mu_1=hp\,,$$

on déduit

$$\lambda_1=hb-m\alpha\,, \qquad \mu_1=ha+m\,,$$

m étant le plus grand entier positif tel que $\lambda_1>0$.

Comme on a $b<\alpha$, on a nécessairement

$$h>m\,.$$

Par hypothèse, $\lambda_1+\mu_1$ doit être inférieur à $a+b$ et on a donc

$$(h-1)(a+b)<m(\alpha-1)\,. \tag{1}$$

Observons que l'on a

$$(h-1)b<m\alpha\,,$$

car autrement la solution

$$\lambda=(h-1)b-m\alpha\,, \qquad \mu_1=(h-1)a+m$$

donnerait $\lambda+\mu<\lambda_1+\mu_1$.

Observons encore que l'on a

$$a+b<\alpha-1\,.$$

En effet, si l'on avait $a+b\geqslant\alpha-1$, on aurait, par (1),

$$(h-1)(a+b)\leqslant m(a+b)\,,$$

d'où $h-1\leqslant m$ et par suite $h=m+1$. Mais alors, l'inégalité (1) donnerait $a+b<\alpha-1$, ce qui est contradictoire.

10. Il existe certainement un entier h_1 supérieur à l'unité et au plus égal à h, tel que

$$(h_1-1)(a+b)<\alpha-1<h_1(a+b)\,.$$

On a d'ailleurs $h_1b>\alpha$ car autrement, on aurait

$$mh_1b<m\alpha<hb\,,$$

d'où $mh_1 < h$, alors que l'on a nécessairement $h \leqslant mh_1$.

Cela étant, la congruence (I) admet la solution

$$\lambda' = h_1 b - \alpha , \qquad \mu' = h_1 a + 1 .$$

Nous supposerons $h > h_1$, c'est-à-dire $m > 1$. Si $m = 1$, on a en effet $h = h_1$; cette hypothèse rentrera comme cas particulier dans les résultats auxquels nous parviendrons.

Il existe un entier positif h_2 tel que l'on a

$$(h_2 - 1)(a + b) < 2(\alpha - 1) < h_2(a + b) .$$

On a évidemment

$$2\,h_1 - 2 \leqslant h_2 \leqslant 2\,h_1 .$$

Supposons $h_2 = 2\,h_1$. On a la solution

$$\lambda'' = 2\,h_1 b - 2\,\alpha = 2\,\lambda' , \qquad \mu'' = 2\,h_1 a + 2 = 2\,\mu' ,$$

donc $\mu'' > \mu'$ et par suite $\lambda' + \mu'$ doit être supérieur à $\lambda'' + \mu''$, ce qui est absurde.

On a donc $h_2 = 2\,h_1 - 1$ et

$$\lambda'' = (2\,h_1 - 1)b - 2\,\alpha = 2\,\lambda' - b ,$$
$$\mu'' = (2\,h_1 - 1)a + 2 = 2\,\mu' - a .$$

Il existe, si $h > h_2$, un nombre h_3 tel que

$$(h_3 - 1)(a + b) < 3(\alpha - 1) < h_3(a + b) .$$

Ce nombre vérifie la double inégalité

$$3(h_1 - 1) \leqslant h_3 \leqslant h_1 + h_2 \quad \text{ou} \quad 3\,h_1 - 1 .$$

Supposons que l'on ait

$$h_3 = 3\,h_1 - 1 = h_1 + h_2 .$$

Alors, on a

$$\lambda''' = \lambda' + \lambda'' , \qquad \mu''' = \mu' + \mu'' .$$

Comme $\mu''' > \mu''$, la somme $\lambda'' + \mu''$ doit être supérieure à $\lambda''' + \mu'''$, ce qui n'a pas lieu. On en conclut

$$h_3 = 3\,h_1 - 2 ,$$
$$\lambda''' = 3\,\lambda' - 2\,b , \qquad \mu''' = 3\,\mu' - 2\,a .$$

Et ainsi de suite. Si l'on pose

$$(h_k - 1)(a + b) < k(\alpha - 1) < h_k(a + b),$$

on aura

$$h_k = kh_1 - k + 1 ,$$
$$\lambda^{(k)} = k\lambda' - (k - 1)b , \qquad \mu^{(k)} = k\mu' - (k - 1)a .$$

En particulier, on aura

$$h = mh_1 - m + 1 ,$$

$$\lambda_1 = m\lambda' - (m-1)b , \qquad \mu_1 = m\mu' - (m-1)a .$$

11. Nous pouvons maintenant ranger les solutions de la congruence (I) par ordre de croissance des sommes $\lambda + \mu$. Nous avons

$$\lambda_1 = m(h_1 b - \alpha) - (m-1)b ,$$
$$\mu_1 = m(h_1 a + 1) - (m-1)a ;$$
$$\lambda_2 = (m-1)(h_1 b - \alpha) - (m-2)b ,$$
$$\mu_2 = (m-1)(h_1 a + 1) - (m-2)a ;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_i = (m+1-i)(h_1 b - \alpha) - (m-i)b ,$$
$$\mu_i = (m+1-i)(h_1 a + 1) - (m-i)a ;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_{m-1} = 2(h_1 b - \alpha) - b , \qquad \mu_{m-1} = 2(h_1 a + 1) - a ;$$
$$\lambda_m = h_1 b - \alpha , \qquad \mu_m = h_1 a + 1 .$$

La plus grande des sommes $\lambda + \mu$ immédiatement inférieure à $\lambda^* + \mu^* = a + b$ est $\bar{\lambda} + \bar{\mu} = \lambda_m + \mu_m$. Nous allons appliquer les raisonnements faits plus haut.

12. D'après ce que nous avons établi, les courbes $C_0^{(m)}$ passent μ_m fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, $\ldots$, (α, x), y fois par le point $(\alpha, x+1)$ et a fois par les points $(\alpha, x+2)$, $\ldots$, $(\alpha, \alpha-1)$. On a par suite

$$\lambda_m + \mu_m + x\mu_m + y + (\alpha - 2 - x)a = p ,$$

c'est-à-dire

$$h_1(a+b) - (\alpha - 1) + x(h_1 a + 1)$$
$$+ y + (\alpha - 2 - x)a = a\alpha + b ,$$

ou encore

$$x[(h_1 - 1)a + 1] + y = \alpha - 1 - (h_1 - 1)(a+b) + a .$$

Posons

$$\alpha - 1 - (h_1 - 1)b = \theta[(h_1 - 1)a + 1] + \zeta .$$

La relation précédente s'écrit

$$x[(h_1 - 1)a + 1] + y$$
$$= (\theta - 1)[(h_1 - 1)a + 1] + a + 1 + \zeta .$$

Nous avons $h_1 \geqslant 2$. Supposons tout d'abord $h_1 > 2$. Nous avons

$$x = \theta - 1 , \qquad y = a + 1 + \zeta .$$

et les nombres

$$h_1 a + 1 - (a + 1 + \zeta) = (h_1 - 1) a - \zeta ,$$
$$y - a = 1 + \zeta$$

doivent être premiers entre eux.

Si ces nombres avaient un facteur commun, celui-ci diviserait $(h_1 - 1) a + 1$ et par conséquent

$$\alpha - (h_1 - 1) b .$$

On a identiquement

$$(h_1 - 1) p = [(h_1 - 1) a + 1] \alpha - [\alpha - (h - 1) b] .$$

Par conséquent, le facteur considéré divise $(h_1 - 1) p$ et plus précisément $h_1 - 1$, puisque p est premier. Mais alors, divisant $h_1 - 1$ et $(h_1 - 1) a + 1$, ce facteur doit diviser l'unité et les nombres envisagés sont bien premiers entre eux.

Supposons maintenant $h_1 = 2$. La relation devient

$$x(a + 1) + y = \theta (a + 1) + \zeta .$$

Si l'on avait $x = \theta$ et $y = \zeta$, on devrait avoir d'une part $\zeta > a$ et d'autre part $\zeta < a + 1$, ce qui est absurde. On a donc bien encore

$$x = \theta - 1 , \qquad y = a + 1 + \zeta$$

comme dans le cas précédent.

On voit donc que sur les courbes $C_0^{(m)}$, le point O est l'origine d'une branche superlinéaire passant simplement par le point P_η, uni de première espèce pour l'involution.

13. Envisageons maintenant les courbes $C_0^{(m-1)}$.

Faisons en premier lieu l'hypothèse que ces courbes passent une fois par P_η et une fois par $P_{\eta-1}$. La branche superlinéaire d'origine O des courbes $C_0^{(m-1)}$ qui passe par $P_{\eta-1}$ doit passer par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., (α, x_1), $(\alpha, x_1 + 1)$ mais non par le point $(\alpha, x_1 + 2)$.

Supposons tout d'abord $x_1 < x$. Nous devons avoir, en tenant compte de la multiplicité $2\mu_m - a$ des courbes $C_0^{(m-1)}$ aux x_1 premiers des points précédents et de la multiplicité y_1 de ces courbes au dernier point, la relation

$$2(\lambda_m + \mu_m) - (a + b) + x_1 (2\mu_m - a) + y_1$$
$$+ (x - x_1 - 1)\mu_m + y + (\alpha - 2 - x) a = p .$$

D'autre part, en considérant les courbes $C_0^{(m)}$, on a

$$\lambda_m + \mu_m + x\mu_m + y + (\alpha - 2 - x)\,a = p\,.$$

On en déduit

$$\lambda_m + \mu_m - (a+b) + x_1(\mu_m - a) + y_1 - \mu_m = 0\,.$$

ou encore

$$x_1[(h_1 - 1)a + 1] + y_1 = \alpha - 1 - (h_1 - 1)(a+b) + \mu_m\,.$$

Nous avons posé tantôt

$$\alpha - 1 - (h_1 - 1)b = \theta[(h-1)a + 1] + \zeta\,.$$

On trouve donc

$$x_1 = \theta - 1\,, \qquad y_1 = \mu_m + 1\,.$$

On en conclut $x_1 = x$, ce qui est absurde.

Supposons maintenant $x_1 > x$. Les courbes $C_0^{(m-1)}$ passent $2\mu_m - a$ fois par les points $(\alpha, 1)$, ..., (α, x), y' fois par le point $(\alpha, x+1)$ et μ'_{m-1} par le point $(\alpha, x+2)$.

Puisque P_η est simple pour les courbes $C_0^{(m-1)}$, celles-ci ont les mêmes multiplicités que les courbes $C_0^{(m)}$ aux points $(\alpha, x+1, 1)$, $(\alpha, x+1, 2)$, ..., P_η, donc on a

$$2\mu_m - a - y' = \mu_m - y\,,$$

d'où

$$y' = \mu_m - a + y = \mu_m + \zeta + 1\,.$$

On a de plus, le point $(\alpha, x+1, 1)$ étant multiple d'ordre $\zeta + 1$,

$$y' = \mu'_{m-1} + \zeta + 1\,.$$

On en déduit $\mu'_{m-1} = \mu'_m$. Ainsi donc, les points $(\alpha, x+2)$, ..., (α, x_1) ont la multiplicité μ_m, le point $(\alpha, x+1)$ une multiplicité $y_1 > a$ et les points $(\alpha, x+2)$, ..., $(\alpha, \alpha-1)$ la multiplicité a pour les courbes $C_0^{(m-1)}$. Il est impossible dans ces conditions que la somme des multiplicités de ces courbes aux points O, $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, \alpha-1)$ soit égale à p. On ne peut donc avoir $x_1 > x$.

On en conclut que les courbes $C_0^{(m-1)}$ passent deux fois par le point P_η. Ces courbes ont la multiplicité $2(\lambda_m + \mu_m) - (a+b)$ en O et la multiplicité $2\mu_m - a$ en $(\alpha, 1)$, ..., (α, x). Un calcul simple, analogue à celui que nous avons effectué plus haut, montre que la multiplicité de ces courbes en $(\alpha, x+1)$ est égale à $a + 2\zeta + 2$. Comme elles ont la multiplicité a au point $(\alpha, x+2)$, elles passent $2(\zeta+1)$ fois par les points $(\alpha, x+1, 1)$, ...

On voit d'ailleurs que les nombres

$$2\mu_m - a - (a + 2\zeta + 2) = 2(\mu_m - a - \zeta - 1)$$

et

$$a + 2(\zeta + 1) - a = 2(\zeta + 1)$$

ont 2 comme plus grand commun diviseur.

14. Le raisonnement précédent peut être repris pour les courbes $C_0^{(m-2)}$, $C_0^{(m-3)}$, ..., C_0'. On constate que ces courbes passent respectivement trois fois, quatre fois, ..., m fois par le point P_η. On en conclut $\eta = 1$.

Nous modifierons nos notations en désignant par P_α le point P_η ou P_1 et par τ_α la courbe rationnelle qui correspond à son domaine du premier ordre sur la surface Φ_1.

Les courbes $C_0^{(m+1)}$ données par la solution $\lambda = b$, $\mu = a$ ne passent plus par P_α. Il leur correspond sur la surface Φ_1 les courbes $\Gamma_0^{(m+1)}$ découpées par les hyperplans rencontrant la courbe τ_α en m points confondus en A_1'. Considérons les hyperplans contenant la courbe τ_α ; les sections de Φ_1 par ces hyperplans rencontrent la courbe τ_α en des points variables et il leur correspond sur F des courbes $C_0^{(m+1)}$ passant un certain nombre de fois par P_α. Il en résulte que ces courbes ne peuvent plus passer $\mu_1' = a$ fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$, mais qu'elles passent $a - 1$ fois par ce point.

On en conclut que la surface Φ_1, les courbes σ_α, τ_α se rencontrent en un point. Observons que ce point peut d'ailleurs être simple ou double pour la surface.

En résumé : *Si* λ_1, μ_1 *est la solution en nombres entiers positifs de la congruence*

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

telle que la somme $\lambda_1 + \mu_1$ *soit minimum et si l'on a*

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = \mathrm{h}p, \quad p = a\alpha + b, \quad (h > 1,\ b < \alpha)$$
$$(h-1)b < m\alpha < hb,$$

il existe deux points unis de première espèce dans le voisinage du point O ; l'un de ces points est multiple d'ordre a, *l'autre d'ordre* m *pour les courbes* C_0' *et les branches de celles-ci qui passent par un de ces points touchent en O la droite* OO_1.

En correspondance, le cône tangent à la surface Φ au point de diramation O' contient deux cônes rationnels, l'un d'ordre a, *l'autre d'ordre* m, *se rencontrant suivant une génératrice.*

15. Les nombres λ_1, μ_1, satisfont à la congruence

$$\mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p), \tag{II}$$

et l'on a

$$\mu_1 + \beta\lambda_1 = h'p .$$

Dans les raisonnements précédents, nous ne nous sommes pas occupé de la valeur de h' et nos résultats subsistent que h' soit égal ou supérieur à l'unité. Si $h' > 1$, on peut reprendre ces raisonnements pour les branches des courbes C_0', C_0'', ... qui touchent la droite OO_a en O.

Posons

$$p = b'\beta + a' \qquad (a' < \beta) .$$

Il existe un nombre entier positif n tel que

$$(h' - 1)a' < n\beta < h'a' .$$

Dans ces conditions, les courbes C_0' passent b' fois par le point $(1, \beta - 1)$ et n fois par un point P_1, uni de première espèce pour l'involution. Aux domaines de ces points correspondent sur la surface Φ_1 deux courbes rationnelles : l'une, σ_1, d'ordre b' l'autre, τ_1, d'ordre n, se rencontrant en un point.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

En un point de diramation O', le cône tangent à la surface Φ se scinde au plus en quatre cônes rationnels.

Nous n'insisterons pas davantage ici sur l'étude du cas où l'on a $h > 1$, $h' > 1$. Observons cependant que si l'on considère les solutions des congruences (I), (II) donnant des sommes inférieures à $a + b$, $a' + b'$ et si l'on range ces sommes par ordre croissant, les nombres μ d'une part, λ d'autre part, doivent aller en décroissant. Ceci n'est possible que si l'un des nombres m, n est égal à l'unité. Si $n = 1$ par exemple, λ_2 peut être supérieur à λ_1.

Liège, le 26 mai 1952.

Bibliographie

Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Actualités scientifiques*, n° 270, Paris, Hermann, 1935).
On trouvera, dans cet opuscule, la bibliographie de la question antérieure à 1935.

Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique*, 1938, pp. 1-44).

Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation (*Annales Scient. de l'Ecole Normale Supérieure*, 1938, pp. 193-222).

Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Ibid.*, 1948, pp. 189-210).

Détermination des singularités d'une surface multiple en certains points de diramation (*Ibid.*, 1950, pp. 1-13).

Sur certaines surfaces multiples n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation (*Annali di Matematica*, 1949, s. 4, t. 28, pp. 89-106).

Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples (*Bull. de l'Académie royale de Belgique*, 1949, pp. 15-30, 270-284, 285-292, 532-541, 636-641, 828-833, 834-840).

Mémoire sur les surfaces multiples (*Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique*, 1952, pp. 1-80).