Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Une variété algébrique à trois dimensions de bigenre* 1. Note (*) de **M. Lucien Godeaux**, transmise par M. René Garnier.

On sait qu'Enriques a construit une surface privée de courbe canonique mais possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro. Nous indiquons dans cette Note une variété algébrique à trois dimensions privée de surface canonique mais possédant une surface bicanonique d'ordre zéro.

Soient $\varphi_0(x_0, x_1, \ldots, x_4) = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ quatre hyperquadriques de l'espace S_4 à quatre dimensions, ayant en commun 16 points distincts et, par suite, linéairement indépendantes. L'équation

$$\varphi_2^2\varphi_3^2 + \varphi_3^2\varphi_1^2 + \varphi_1^2\varphi_2^2 = \varphi_0\varphi_1\varphi_2\varphi_3$$

représente une vairété V_3^8 d'ordre 8 possédant trois surfaces doubles Φ_1 ($\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$), $\Phi_2(\varphi_3 = 0, \varphi_1 = 0)$, $\Phi_3(\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0)$, du 4e ordre, une courbe Γ du 8e ordre triple ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$) et 16 points quadruplés ($\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$).

Les hypersurfaces adjointes à V_3^8 sont du 3e ordre et doivent passer par les surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3. De telles hypersurfaces n'existent pas, car elles devraient rencontrer l'hyperquadrique $\varphi_1 = 0$ suivant Φ_2, Φ_3 et contiendraient cette hyperquadrique comme partie. La surface Φ_1 devrait alors appartenir à un hyperplan, ce qui est impossible. Pour V_3^8 on a donc $P_g = 0$.

Les surfaces biadjointes à V_3^8 sont découpées par les hypersurfaces du 6e ordre passant doublement par les surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3. L'hypersurface $\varphi_1\varphi_2\varphi_3 = 0$ satisfait à cette condition et un raisonnement analogue au précédent montre qu'elle est unique. Elle ne rencontre pas V_3^8 en dehors des surfaces doubles, donc la surface bicanonique est d'ordre zéro. On a $P_2 = 1$.

Il existe des variétés algébriques à trois dimensions dépourvues de surface canonique ($P_g = 0$) *ayant une surface bicanonique d'ordre zéro* ($P_2 = 1$).

Une section hyperplane de V_3^8 est une surface de genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 9$. Les adjointes à une telle surface sont découpées par les hypersurfaces du 4e ordre

$$\lambda_1\varphi_2\varphi_3 + \lambda_2\varphi_3\varphi_1 + \lambda_3\varphi_1\varphi_2 = 0.$$

Les courbes canoniques de la surface sont d'ordre 8 et de genre 5.

On remarquera l'analogie de l'équation de V_3^8 avec celle d'une surface de Steiner.

(*) Séance du 9 août 1965.

(37, *quai Orban, Liège, Belgique.*)