On peut encore remarquer les égalités

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}=\frac{b}{b+c},\quad \sin C=\operatorname{tg} A\cos B.$$

(Delahaye)

17. *Sphères de Malfatti dans le tétraèdre régulier.* Etant donné un tétraèdre quelconque $A_1A_2A_3A_4$, on peut se proposer de trouver quatre sphères M_1, M_2, M_3, M_4 dont chacune touche les trois autres et trois faces du tétraèdre (ou inscrites respectivement aux trièdres A_1, A_2, A_3, A_4 de ce solide). C'est là le célèbre problème de Malfatti étendu à l'espace, dans le cas où il a une solution.

M. Godeaux (Ath) nous adresse les équations de ce problème en prenant pour inconnues les rayons des quatre sphères et les coordonnées tétraédriques normales de leurs centres. Ces coordonnées sont

$$(d_1, \rho_1, \rho_1, \rho_1),\quad (\rho_2, d_2, \rho_2, \rho_2),\quad (\rho_3, \rho_3, d_3, \rho_3),\quad (\rho_4, \rho_4, \rho_4, d_4),$$

où ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 représentent les rayons des sphères, et l'on a les quatre égalités

$$\frac{d_1}{h_1}+\frac{\rho_1}{h_2}+\frac{\rho_1}{h_3}+\frac{\rho_1}{h_4}=1,\quad \ldots,$$

où h_1, h_2, h_3, h_4 sont les hauteurs du tétraèdre.

D'autre part, si a_{12}, a_{13}, ... désignent les longueurs des arêtes A_1A_2, A_1A_3, ... et $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ les coordonnées normales absolues de deux points P, Q, on a la formule

$$\overline{PQ}^2=-\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)\frac{a_{12}^2}{h_1h_2}.$$

Celle-ci donne six égalités exprimant que les sphères M_1, M_2, ... se touchent deux à deux; par exemple

$$\begin{aligned}(\rho_1+\rho_2)^2=(d_1-\rho_2)(d_2-\rho_1)\frac{a_{12}^2}{h_1h_2}\\ -(d_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_2)\left(\frac{a_{13}^2}{h_1h_3}+\frac{a_{14}^2}{h_1h_4}\right)\\ -(\rho_1-d_2)(\rho_1-\rho_2)\left(\frac{a_{23}^2}{h_2h_3}+\frac{a_{24}^2}{h_2h_4}\right)\\ +(\rho_1-\rho_2)^2\frac{a_{34}^2}{h_3h_4}.\end{aligned}$$

Dans le cas du tétraèdre régulier, on a $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$ et l'on trouve facilement la valeur du rayon ρ d'une sphère de Malfatti en fonction de l'arête a du tétraèdre.

Ce cas particulier admet une solution élémentaire qui est probablement connue. Les droites A_1M_1, A_2M_2 concourent au centre O du tétraèdre, et A_1M_1 passe au centre O_1 du triangle $A_2A_3A_4$. Soit $r = IH = \frac{1}{4} A_1H$ le rayon de la sphère inscrite au tétraèdre, les triangles semblables OM_1M_2, OA_1A_2 donnent

$$\frac{M_1M_2}{A_1A_2} = \frac{OM_2}{OA_2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{2\rho}{a} = \frac{r-\rho}{r}.$$

Par conséquent,

$$\rho = \frac{ar}{a+2r}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} + \frac{2}{a}.$$

Observons que

$$HA_2 = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad A_1H = \sqrt{\overline{A_1A_2}^2 - \overline{HA_2}^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}, \quad r = \frac{a\sqrt{6}}{12};$$

il en résulte

$$\rho = \frac{10}{a}(\sqrt{6} - 1). \qquad \text{(J. N.)}$$

18. *Théorème sur les quadriques.* Le théorème suivant est connu : *Si deux cônes sont circonscrits à un même ellipsoïde, leur intersection se compose de deux coniques.*

En voici une démonstration géométrique qui est peut-être nouvelle.

Le plan mené par les sommets S, S′ des deux cônes et le centre O de l'ellipsoïde coupe les cônes suivant quatre génératrices SA, SB, S′A′, S′B′ touchant l'ellipsoïde aux points A, B, A′, B′ et formant un quadrilatère MNPQ circonscrit à l'ellipse suivant laquelle le plan SS′O coupe l'ellipsoïde. Les diagonales MP, NQ de ce quadrilatère et les droites AB, A′B′, d'après un théorème connu, passent par un même point C; les ellipses le long desquelles les cônes S, S′ touchent l'ellipsoïde ont une corde commune DD′ qui passe par C. Le plan mené par MP et DD′ rencontre les deux cônes suivant deux ellipses qui se confondent comme ayant en commun un diamètre MP et une corde conjuguée DD′. De même le plan mené par NQ et DD′ coupe les deux cônes suivant la même conique. (Cikot, professeur, à Bois-le-Duc)