Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 38e année, nº 11-12, 1969, pp. 599-601

UNE PROPRIÉTÉ D'UNE TRANSFORMATION BIRATIONNELLE CLASSIQUE

par Lucien GODEAUX
Membre de la Société

La transformation birationnelle dont il va être question est bien connue, elle a déjà été considérée par Cremona (*). Elle fait correspondre aux plans d'un espace S à trois dimensions les surfaces cubiques d'un espace S′ passant par une sextique gauche de genre trois, et inversement, aux plans de S′ correspondent les surfaces cubiques passant par une sextique C de genre trois. Nous nous proposons de montrer que les courbes C et C′ sont en correspondance birationnelle.

1. Considérons trois réciprocités d'équations

$$\sum_i\sum_k a_{ik}x_ix'_k = 0,\quad \sum_i\sum_k b_{ik}x_ix'_k = 0,\quad \sum_i\sum_k c_{ik}x_ix'_k = 0,$$
$$(i,\, k = 0, 1, 2, 3)$$

linéairement indépendantes entre deux espaces S, S′ à trois dimensions. Les points x de S et les points x' de S′ conjugués dans les trois réciprocités se correspondant dans une transformation birationnelle T.

Aux plans de S′ correspondent dans S les surfaces cubiques passant par une courbe C d'équations

$$\left\| \begin{matrix} \sum\limits_i a_{i0}x_i & \sum\limits_i a_{i1}x_i & \sum\limits_i a_{i2}x_i & \sum\limits_i a_{i2}x_i \\ \sum\limits_i b_{i0}x_i & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ \sum\limits_i c_{i0}x_i & \text{—} & \text{—} & \sum\limits_i c_{i3}x_i \end{matrix} \right\| = 0$$

d'ordre six et de genre trois.

Manuscrit reçu le 20 novembre 1969.

(*) Cremona, *Sulle transformazioni razionali nello spazio* (Rendiconti del Istituto Lombardo, 1871, pp. 269-279). Opere Matematiche, vol. III, pp. 241-250. Pour un exposé de cette transformation, voir par exemple notre *Géométrie Algébrique*, tome I, pp. 110-114 (Liège, 1948).

Nous pouvons écrire

$$y_1 \sum_i a_{ik}x_i + y_2 \sum_i b_{ik}x_i + y_3 \sum_i c_{ik}x_i = 0, \qquad (k = 0, 1, 2, 3)$$

ou

$$x_0(a_{0k}y_1 + b_{0k}y_2 + c_{0k}y_3) + x_1(a_{1k}y_1 + b_{1k}y_2 + c_{1k}y_3) +$$
$$x_2(a_{ik}y_1 + b_{2k}y_2 + c_{2k}y_3) + x_2(a_{2k}y_1 + b_{2k}y_2 + c_{2k}y_3) = 0, \qquad (k = 0, 1, 2, 3).$$

En écrivant que ces équations sont compatibles, nous obtenons

$$\begin{vmatrix} a_{00}y_1+b_{00}y_2+c_{00}y_3 & a_{10}y_1+b_{10}y_2+c_{10}y_3 & a_{20}y_1+b_{10}y_2+c_{20}y_3 & a_{30}y_1+b_{31}y_2+c_{30}y_3 \\ a_{01}y_1+b_{01}y_2+c_{01}y_3 & a_{11}y_1+b_{11}y_2+c_{11}y_3 & - & - \\ a_{02}y_1+b_{02}y_2+c_{02}y_3 & - & - & - \\ a_{03}y_1+b_{03}y_2+c_{03}y_3 & - & - & a_{33}y_1+b_{33}y_2+c_{33}y_3 \end{vmatrix} = 0,$$

équation d'une courbe plane Γ du quatrième ordre et de genre trois.

Les courbes C et Γ sont en correspondance birationnelle.

2. Aux plans de l'espace S correspondent dans S′ les surfaces cubiques passant par la courbe C′ d'équations

$$\left\| \sum_k a_{0k}x'_k \quad \sum_k a_{1k}x'_k \quad \sum_k a_{2k}x'_k \quad \sum_k a_{3k}x'_k \right\| = 0$$

matrice où les deuxième et troisième lignes sont obtenues en remplaçant a par b puis par c.

On en conclut

$$y_1 \sum_k a_{ik}x'_k + y_2 \sum_k b_{ik}x'_k + y_3 \sum c_{ik}x'_k = 0, \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

En écrivant que ces équations sont compatibles, on retrouve l'équation de la courbe Γ sauf l'échange des lignes et des colonnes.

Les courbes C′ et Γ sont en correspondance birationnelle et par suite *Les courbes* C, C′ *sont birationnellement identiques.*

3. On peut obtenir une autre démonstration de ce fait.

Rappelons que la série canonique $|G|$ (ou $|G'|$) de la courbe C (ou C′) est découpée par les quadriques passant par une cubique gauche s'appuyant en huit points sur la courbe.

Aux points d'une droite a' de S′ correspond dans S une cubique gauche K s'appuyant en huit points sur C et à une bisécante a de K correspond dans S′ une cubique K′ s'appuyant en huit points sur C′ et en deux points sur a'.

A la série canonique g_4^1 découpée sur C par les quadriques Q passant par K et par a, on peut faire correspondre la série canonique g_4^1 découpée sur C′ par les quadriques Q′ passant par K′ et par a' (cette correspondance est évidemment distincte de T). On en déduit qu'il y a une correspondance biunivoque entre les groupes canoniques G de C et les groupes canoniques G′ de C′.

Rapportons projectivement les séries canoniques $|G|$ et $|G'|$ de C et de C′ aux droites d'un plan σ. On obtient ainsi deux courbes γ, γ' sur lesquelles les séries canoniques sont découpées par les droites du plan. Elles sont du quatrième ordre et de genre trois. Puisque les séries canoniques de C, C′ se correspondent biunivoquement, il y a une correspondance biunivoque entre les droites du plan σ. De plus, à une série canonique simplement infinie de γ correspond une série simplement infinie, canonique, de γ'. Cette correspondance est donc une homographie H.

Les séries canoniques se correspondant dans H, il en est de même de leurs séries jacobiennes $|3G|$ et $|3G'|$. On en conclut qu'à un groupe canonique possédant un point double de γ correspond une groupe canonique analogue de γ', c'est-à-dire que les tangentes à γ et à γ' se correspondent. Les courbes γ, γ' sont donc birationnellement identiques de même par conséquent que les courbes C, C′.

4. Le théorème que nous venons d'établir s'étend sans difficulté aux transformations analogues entre deux espaces à un nombre quelconque de dimensions.

Envisageons n réciprocités linéairement indépendantes entre deux espaces S, S′ à n dimensions et la transformation birationnelle T qui fait se correspondre les points de ces espaces conjugués par rapport aux n réciprocités (*).

Aux hyperplans de S′ correspondent dans S les hypersurfaces d'ordre n passant par une variété V à $n - 2$ dimensions et d'ordre $n(n+1):2$ et aux hyperplans de S correspondent de même dans S′ les hypersurfaces d'ordre n passant par une variété V′ à $n - 2$ dimensions d'ordre $n(n+1):2$.

Les variétés V, V′ sont birationnellement équivalentes à une hypersurface W d'ordre $n+1$, située dans un espace à $n - 1$ dimensions, par conséquent, les variété V, V′ sont birationnellement identiques.

Le système canonique de la variété W coïncide avec le système des sections hyperplanes, donc le genre géométrique des variétés V, V′ est $P_g = n$.

Liège, le 10 novembre 1969.

(*) Nous avons étudié cette transformation dans une note *Sur une correspondance cremonienne entre deux espaces à n dimensions* (Rendiconti del Istituto Lombardo, 1910, pp. 116-119).