Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 37e année, nº 5-8, 1968, pp. 257-260

VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES POSSÉDANT UNE SEULE VARIÉTÉ CANONIQUE

par LUCIEN GODEAUX
Membre de la Société

Dans un travail récent (*), nous avons étudié les involutions cycliques dépourvues de points unis appartenant à une variété algébrique principalement au point de vue de la correspondance des systèmes canoniques. Cette note est une application des résultats obtenus à la construction d'une variété ne possédant qu'une variété canonique isolée.

1. Soit dans un espace linéaire S_{2n} à $2n$ dimensions une homographie H de période $n+1$, d'équations

$$\rho x'_i = \varepsilon^i x_i, \quad \rho x'_{n+1+i} = \varepsilon^{i+1} x_{n+1+i}, \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

où ε est une racine primitive d'ordre $n+1$ de l'unité.

Considérons une variété V_{n-1}, algébrique, intersection de $n+1$ hyperquadriques de S_{2n} transformées en elles-mêmes par H. Sur V_{n-1}, d'ordre 2^{n+1}, H détermine une involution I d'ordre $n+1$ et nous rechercherons en premier lieu dans quelles conditions l'involution I est dépourvue de points unis.

En désignant par O_i le sommet de la figure de référence dont toutes les coordonnées sont nulles sauf x_i, les axes ponctuels de l'homographie H sont le point O_0 et les droites $O_1O_{n+1}, O_2O_{n+2}, \ldots, O_nO_{2n}$.

Supposons en premier lieu n pair. Les hyperquadriques définissant V_{n-1} ne peuvent passer par O_0 ni rencontrer les droites $O_1O_{n+1}, \ldots, O_nO_{2n}$. Les équations de ces hyperquadriques doivent donc contenir respectivement des termes en

$$x_0^2, a_0x_1^2 + a_1x_1x_{n+1} + a_2x_{n+1}^2, \ldots, a'_0x_n^2 + a'_1x_nx_{2n} + a'_2x_{2n}^2.$$

Observons que dans les équations des hyperquadriques, le terme contenant x_1^2 ne peut figurer que dans une de ces équations. En dehors de celle-ci, x_1 et x_{n+1} ne figurent qu'au premier degré. Dans ces conditions les points de rencontre de V_{n-1} avec l'axe O_1O_{n+1} sont donnés par l'équation

$$a_0x_1^2 + a_1x_1x_{n+1} + a_2x_{n+1}^2$$

et l'involution I possède deux points unis sur cet axe.

Pour notre objet, n doit donc être impair.

(*) *Involutions cycliques privées de points unis appartenant à une variété algébrique complètement régulière* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, séance du 8 juin 1968).

Manuscrit reçu le 20 juin 1968.

2. Posons $n = 2\nu - 1$. Parmi les hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H, il existe un système linéaire $| Q_0 |$ dont l'équation contient les termes

$$x_0^2,\ x_\nu^2,\ x_\nu x_{n+\nu},\ x_{n+\nu}^2.$$

L'équation d'un second système $| Q_1 |$ contient les termes

$$x_1^2,\ x_1 x_{n+1},\ x_{n+1}^2,\ x_{\nu+1}^2,\ x_{\nu+1}x_{n+\nu+1},\ x_{n+\nu+1}^2.$$

Et ainsi de suite. L'équation d'un ν-ième système $| Q_{0-1} |$ contient les termes

$$x_n^2,\ x_n x_{2n},\ x_{2n}^2,\ x_{\nu-1}^2,\ x_{\nu-1}x_{n+\nu-1},\ x_{n+\nu-1}^2.$$

Les équations des autres systèmes d'hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H ne contiennent que le produit de deux coordonnées.

Parmi les $n + 1$ hyperquadriques définissant V_{n-1}, nous prendrons une hyperquadrique de chacun des systèmes $| Q_0 |, | Q_1 |, \ldots, | Q_{\nu-1} |$. En raisonnant comme plus haut, on voit que V_{n-1} rencontre chacune des droites axes de H en deux points. Mais on peut prendre pour définir V_{n-1} deux hyperquadriques de chacun des systèmes $| Q_0 |, | Q_1 |, \ldots, | Q_{\nu-1} |$, deux hyperquadriques de $| Q_0 |$ par exemple rencontrant $O_1 O_{n+1}$ en des points distincts. Dans ces conditions H détermine sur V_{n+1} une involution I d'ordre $n + 1 = 2\nu$ n'ayant aucun point uni.

3. Cherchons maintenant les dimensions des systèmes $| Q_0 |, | Q_1 |, \ldots, | Q_{\nu-1} |$.

L'équation d'une hyperquadrique Q_0 contient, outre les quatre termes déjà mentionnés plus haut, les termes

$$x_i x_{2\nu-i},\ x_i x_{n+2\nu-i},\ x_{n+i}x_{2\nu-i},\ x_{n+i}x_{n+2\nu-i},$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$$

soit en tout $4(\nu - 1)$ termes. On en conclut que $| Q_0 |$ a la dimension $4\nu - 1$.

L'équation d'une hyperquadrique Q_1 contient, outre les six termes déjà mentionnés, les termes.

$$x_0 x_2,\ x_0 x_{n+2},$$

$$x_i x_{2\nu-i+2},\ x_i x_{n+2\nu-i+2},\ x_{n+i}x_{2\nu-i+2},\ x_{n+i}x_{n+2\nu-i+2},$$
$$(i = 1, 3, \ldots, \nu - 1)$$

soit en tout $2 + 4(\nu - 2) = 4\nu - 6$ termes. Le système $| Q_1 |$ a donc également la dimension $4\nu - 1$.

On trouve de même que les systèmes $| Q_2 |, \ldots, | Q_{\nu-1} |$ ont la dimension

$$4\nu - 1 = 2n + 1.$$

Les équations des hyperquadriques $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{\nu-1}$ se reproduisent, lorsque l'on effectue H, multipliées par $\varepsilon^0 = 1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{2\nu-2}$. Désignons par $| Q_\nu |$ le système d'hyperquadriques dont l'équation se reproduit multipliée par ε quand on effectue H. L'équation d'une de ces hyperquadriques contient les termes

$$x_0 x_1,\ x_0 x_{n+1},$$

$$x_i x_{2\nu-i+1},\ x_i x_{n+2\nu-i+1},\ x_{n+i}x_{2\nu-i+1},\ x_{n+i}x_{n+2\nu-i+1},$$
$$(i = i, 2, \ldots, \nu - 1)$$

soit en tout $2 + 4(\nu - 1) = 4\nu - 2$ termes. Le système $| Q_\nu |$ a donc la dimension $4\nu - 3 = 2n - 1$.

On trouve de même que les systèmes d'hyperquadriques $| Q_{\nu+1} |, | Q_{\nu+2} |, \dots, | Q_n |$ ont les équations se reproduisent multipliées par $\varepsilon^3, \varepsilon^5, \dots, \varepsilon^{2\nu-1}$ lorsque l'on fectue H, ont la même dimension $2n - 1$.

La théorie des homographies exige que l'on ait

$$\nu(2n+2) + \nu 2n = (n+1)(2n+1),$$

qui est une identité.

4. La variété V_{n-1} étant, dans S_{2n}, l'intersection de $n+1$ hyperquadriques, on système canonique est découpé par les hypersurfaces d'ordre $2(n+1) - 2n+1) = 1$, c'est-à-dire par les hyperplans. Nous désignerons par F les sections yperplanes de V_{n-1}.

Une variété F étant l'intersection de $n+1$ hyperquadriques dans un espace $2n-1$ dimensions, son système canonique est découpé par les hypersurfaces l'ordre $2(n+1) - 2n = 2$, c'est-à-dire par les hyperquadriques. Le genre géométrique des variétés F est donc

$$p_g = \binom{2n+1}{2} - (n+1) = 2n^2 - 1.$$

Il existe, sur la variété V_{n-1} des sections hyperplanes qui appartiennent à l'involution I. Ce sont la variété F_0 section de V_{n-1} par l'hyperplan $x_0 = 0$, les variétés F_1, formant un faisceau $| F_1 |$ section de V_{n-1} par les hyperplans $x_1 + \lambda x_{n+1} = 0, \dots$, les variétés F_n formant un faisceau $| F_n |$ sections de V_{n-1} par les hyperplans $x_n + \lambda x_{2n} = 0$. Donc, outre F_0, n faisceaux $| F_1 |, | F_2 |, \dots, | F_n |$.

Les hyperquadriques $Q_0, Q_1, \dots, Q_{\nu-1}, Q_\nu, \dots, Q_n$ découpent sur V_{n-1} des systèmes linéaires de courbes de même dimension $2n - 1$.

Désignons par Ω une variété à $n-1$ dimensions image de l'involution I et par $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n$ les variétés qui correspondent sur Ω aux variétés $F_0, F_1, \dots, F_n$. La variété Φ_0 est isolée, mais les variétés $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ appartiennent à des faisceaux $| \Phi_1 |, | \Phi_2 |, \dots, | \Phi_n |$.

Le genre géométrique de V_{n-1} est égal à $P_g = 2n+1$ et V_{n-1} étant de dimension paire, le genre géométrique P'_g de Ω est donné, d'après la note citée au début, par

$$P_g + 1 = (n+1)(P'_g + 1),$$

d'où $P'_g = 1$. La variété Ω possède donc une seule variété canonique Φ_0.

5. Le système canonique de la variété F_0 est découpé par les hyperquadriques et comprend $n+1$ systèmes linéaires appartenant à l'involution I. L'un, de dimension $2n-2$, est découpé par les hyperquadriques Q_0, les autres, de dimension $2n-3$ sont découpés par les hyperquadriques $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$. La variété F_0 étant de dimension impaire, $n-2$, le premier système a pour homologue sur Φ_0, le système canonique de cette variété d'après la note citée au début. La surface Φ_0 a donc le genre $p'_g = 2n-1$ et l'on a bien

$$(p_g - 1 = (n+1)(p'_g - 1).$$

Les variétés Q_0 découpent sur F_0 le transformé du système canonique de Φ_0 et on a

$$| \Phi'_0 | = | 2\Phi_0 |.$$

Les hyperquadriques $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ découpent sur une variété du faisceau $| F_1 |$, des systèmes linéaires de dimension $2n-3$ sauf les hyperquadriques Q_ν qui découpent un système de dimension $2n - 2 = p'_g - 1$. Il en résulte que les variétés Φ_ν ont le genre géométrique p'_g et qu'au système découpé sur F_1 par les hyperquadriques Q_ν correspond sur une surface Φ_1 le système canonique. Si l'on remarque l'équation de Q_0 contient un terme x_0x_1, on a

$$| \Phi'_i | = | \Phi_0 + \Phi_1 |.$$

En remarquant que dans $Q_{\nu-1}$ se trouve un terme x_0x_ν, on trouve de même

$$| \Phi'_\nu | = | \Phi_0 + \Phi_\nu |$$

parce que le système $| Q_\nu |$ découpe sur une surface F_ν un système de dimension $2n - 2$ alors que les hyperquadriques des autres systèmes découpent des systèmes de dimension $2n - 3$.

La variété Ω image d'une involution cyclique d'ordre $n + 1$ privée de points unis appartenant à la variété d'un espace à $2n$ dimensions, où n est impair et dont le système canonique coïncide avec celui des sections hyperplanes, possède une variété canonique unique, de genre géométrique $p_g = 2n - 1$.

Observons que pour $n = 3$, la variété V_{n-1} devient une surface et la variété Ω une surface possédant une courbe canonique unique de genre cinq.

Liège, le 18 juin 1968.