Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 40e année, no 9-10, 1971, pp. 407-412

OBSERVATIONS SUR LES SURFACES LIÉES A UNE SUITE DE LAPLACE PÉRIODIQUE

par Lucien GODEAUX
Membre de la Société

A une surface (x), rapportée à ses asymptotiques u, v, M. Bompiani [1] a attaché les points U, V de l'hyperquadrique de Klein Q de S_5 qui représentent les tangentes xx_u, xx_v aux asymptotiques u, v d'un point de (x). Il a montré que ces points sont transformés de Laplace l'un de l'autre et appartiennent donc à une suite de Laplace L autopolaire par rapport à Q. Supposons que la surface (x) soit attachée à une suite de Laplace périodique. Nous avons montré que la période est nécessairement paire. Nous supposerons qu'elle est égale à $2n +$ $(n > 1)$.

Le cas $n = 2$ correspond aux couples de surfaces ayant mêmes quadriques de Lie; il a été étudié par Demoulin puis par nous [2]. Nous avons pu déterminer le cas $n = 3$, qui correspond aux couples de surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin [3]. Nous avons ensuite considéré le cas général dans plusieurs notes [4], sans cependant parvenir à une solution.

La suite L appartenant à un espace linéaire à cinq dimensions, il existe une relation linéaire entre sept points consécutifs de la suite. Nous avons jadis établi les relations qui existent entre les points V^3, V^2, ..., U^1, U^2 et U^3, U^2, ..., V^1, V^2, qui se déduisent d'ailleurs l'une de l'autre par dérivation [5]. Nous avons ensuite donné une méthode pour établir la relation qui existe entre sept points consécutifs quelconques [6]. Notre but dans cette note est d'examiner si ces relations peuvent être utiles dans la détermination du problème qui nous occupe. Notre étude aboutit

Manuscrit reçu le 16 septembre 1971.

(1) Sull'equazione di Laplace (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1912, t. **34**, pp. 383-407). Le même théorème a été établi à la même époque par Tzitzeica, par d'autres méthodes.

(2) Pour la bibliographie, voir notre exposé sur *La Théorie des surfaces et l'espace réglé* (Paris, Hermann, 1934).

(3) *Surfaces dont les quadriques de Lie se touchent en quatre points* (Volume publié en l'honneur de V. Hlavaty, Bloomington, 1966, pp. 161-166). Sur les directrices de Wilczynski des surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin (*Bulletin de l'Académie roy. de Belgique*, 1964, pp. 48-55).

(4) Surfaces associées à une suite de Laplace périodique (*Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liège*, 1963, pp. 597-601). Sur les surfaces liées à une suite de Laplace périodique (*Archiv der Mathematik*, 1965, pp. 117-121). La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé (*Mémoire in-8o de l'Académie roy. de Belgique*, 1964, pp. 1-84). Recherches sur les surfaces associées à des suites de Laplace périodiques (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1964, pp. 842-849, 920-925, 1121-1126).

(5) Remarque sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie (*Comptes Rendus du Congrès National des Sciences*, Bruxelles, 1930, pp. 69-70).

(6) Remarque sur les suites de Laplace associées à une surface (*Bulletin de l'Académie roy. de Belgique*, 1964, pp. 8-10).

à retrouver par une autre méthode nos résultats déjà obtenus mais nous estimons qu'elle devait être traitée.

1. Soit

$$\ldots, U^i, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^i, \ldots \qquad (L)$$

la suite de Laplace L liée à une surface (x) rapportée à ses asymptotiques u, v, les points U, V représentant les tangentes asymptotiques xx_u, xx_v en un point x sur l'hyperquadrique Q de Klein de S_5. Dans la suite L, chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u, et on a

$$U_u + 2aV = 0, \quad V_v + 2bU = 0.$$

On supposera la suite L illimitée dans les deux sens, ce qui exclut notamment les surfaces réglées et celles dont les asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires.

Rappelons rapidement quelques notations. Nous posons

$$h_1 = -(\log . b)_{uv} + 4ab, \quad h_i = -(\log . bh_1 \ldots h_{i-1})_{uv} + h_{i-1},$$
$$k_1 = -(\log . a)_{uv} + 4ab, \quad k_i = -(\log . ak_1 \ldots k_{i-1})_{uv} + k_{i-1}.$$

Nous posons en outre

$$H^i = (\log . bh_1 \ldots h_i), \quad K^i = (\log . ak_1 \ldots k_i),$$
$$H^0 = \log . b, \quad K^0 = \log . a,$$

de sorte que

$$h_{i+1} = -H^i_{uv} + h_i, \quad k_{i+1} = -K^i_{uv} + k_i$$

Nous avons démontré que l'on a

$$2V^3 + 2V^2 (\log . a^3k_1^2k_2)_u + 2\alpha_1 V^1 + \alpha (\log . a^2\alpha)_u V$$
$$+ 4b [\beta U + H^s_u U^1 + U^2] = 0, \qquad (1)$$

$$2U^3 + 2U^2 (\log . b^3h_1^2h_2)_v + 2\beta_1 U^1 + \beta (\log . b^2\beta)_v U$$
$$+ 4a [\alpha V + K^s_u V^1 + V^2] = 0. \qquad (2)$$

Représentons par M le premier membre de l'équation (1) et par N celui de l'équation (2). En observant que l'on a

$$(\alpha_1)_v = 4abK^s_u - k_2 (\log . a^3k^2k_s^2)_u,$$
$$(\beta_1)_u = 4abH^s_v - h_2 (\log . b^3h_1^2h_2)_v,$$
$$a\alpha (\log . a^2\alpha)_u = b\beta (\log . b^2\beta)_v,$$

on trouve [7]

$$M_v = 2bN, \quad N_u = 2aM \qquad (3)$$

On en conclut que M et N satisfont aux équations de Laplace

$$M_{uv} - H^0_u M_v - 4abM = 0, \qquad (3)$$
$$N_{uv} - K^0_v N_u - 4abN = 0. \qquad (4)$$

(7) Les premières formules corrigent celles qui ont été données page 9, lignes 16 et 19 de notre « Remarque sur les suites ... » citée plus haut. Les autres formules sont exactes. Nous nous excusons de ce lapsus calami.

2. Les quantités M, N appartiennent à une suite de Laplace

$$\ldots, M^i, \ldots, M^1, M, N, N^1, \ldots, N^i, \ldots \tag{L'}$$

'on a

$$M^1 = M_u - H_u^0 M, \quad M^{i+1} = M_u^i - H_u^i M^i,$$

$$N^1 = N_v - K_v^0 N, \quad N^{i+1} = N_v^i - K_v^i N^i.$$

Nous avons démontré que M^n ne dépend que des termes $V^{n-3}, V^{n-2}, \ldots, V^{n+2}$ N^n que des termes en $U^{n-3}, U^{n-2}, \ldots, U^{n+2}$, c'est-à-dire chaque fois de sept termes sécutifs de la suite L.

3. Supposons que la suite L soit périodique ayant précisément comme période $+ 2$, $(n > 1)$. Les points U^{2n+2} et U coïncident et par conséquent il en est de même M^{2n+2} et M. Dans ces conditions, l'équation de Laplace

$$M_{uv}^{2n+2} - H_u^{2n+2} M_v^{2n+2} - h_{2n+2} M^{2n+2} = 0$$

être identique à l'équation (3).

Posons $M^{2n+2} = \lambda M$. L'équation précédente devient

$$\lambda M_{uv} + (\lambda_u - \lambda H_u^{2n+2}) M_v + \lambda_v M_u + (\lambda_{uv} - \lambda_v H_u^{2n+2} - \lambda h_{2u+2}) M = 0,$$

ation qui doit être identique à l'équation (3). Cela donne $\lambda_v = 0$ et l'équation cédente devient

$$\lambda M_{uv} + (\lambda_u - \lambda_u H^{2n+2}) M_v - \lambda h_{2n+2} M = 0.$$

On doit donc avoir

$$\lambda = \frac{\lambda_u - \lambda H_u^{2n+2}}{- H_u^0} = \frac{\lambda h_{2u+2}}{4ab}.$$

On en déduit

$$h_{2u+2} = 4ab, \quad (\log . \lambda)_u = H_u^{2n+2} - H_u^0$$

$$(\log . \lambda)_u = (\log . abh_1 \ldots h_{2n+1})_u$$

encore, en dérivant par rapport à v,

$$K_{uv}^0 + H_{uv}^{2n+1} = 0.$$

Comme nous l'avons établi antérieurement en posant $U^{2n+2} = lU$, ces conditions t nécessaires et suffisantes pour que la suite L ait la période $2n + 2$.

De même, la quantité N^{2n+2} doit coïncider avec N et l'équation

$$N_{uv}^{2n+2} - K_u^{2n+2} N_v^{2n+2} - K_{2n+2} N^{2n+2} = 0$$

coïncider avec l'équation (4).

En posant $N^{2n+2} = \mu N$, on a

$$k_{2n+2} = 4ab, \quad (\log . \mu)_v = (\log . abk_1 \ldots k_{2n+1})_v$$

$$H_{uv}^0 + K_{uv}^{2n+1} = 0.$$

Ces conditions sont équivalentes à celles trouvées plus haut.

4. La quantité N^{2n+1} doit également coïncider avec N. L'équation

$$N_{uv}^{2n+1} - K_v^{2n+1} N_u^{2n+1} - k_{2n+1} N^{2n+1} = 0$$

doit être identique à l'équation (3).

Posons dans l'équation précédente $N^{2n+1} = \mu' M$. Elle devient

$$\mu' M_{uv} + (\mu'_v - \mu' K_v^{2n+1}) M_u + \mu'_u M_v + (\mu'_{uv} - \mu'_u K_v^{2n+1} - \mu' k_{2n+1}) M = 0.$$

En identifiant à l'équation (3), on a

$$\mu'_v = \mu' K_v^{2n+1}$$

et l'équation précédente devient

$$\mu' M_{uv} + \mu'_u M_v + \mu' (K_{uv}^{2n+1} - k_{2n+1}) M = a.$$

On a donc

$$\mu' = \frac{\mu'_u}{-H_u^0} = \frac{\mu'(K_{uv}^{2n+1} - k_{2n+1})}{-4ab}.$$

Cela donne

$$(\log . b\mu')_u = 0, \quad 4ab = K^{2n+2}.$$

La seconde relation a déjà été déduite de l'identité de N^{2n+2} et de N. De la seconde relation, on déduit

$$(\log . \mu')_{uv} = K_{uv}^{2n+1} = - H_{uv}^0$$

et

$$k_{2n+1} - k_{2n+2} = h_1 - 4ab,$$

d'où $k_{2n+1} = h_1$.

5. D'une manière générale, le point U^{n+i} doit coïncider avec le point V^{n-i+1} et le point V^{n+i} avec le point U^{n-i+1}. Il en résulte que les quantités M^{n+i} et N^{n-i+1} doivent coïncider. Les équations de Laplace auxquelles ces quantités satisfont doivent être identiques. Il en est de même des équations auxquelles satisfont les quantités M^{n-i+1} et N^{n+i}.

Pour écrire que les équations

$$M_{uv}^{n+i} - h_u^{n+i} M_v^{n+i} - h_{n+i} M^{n+i} = 0,$$

$$N_{uv}^{n-i+1} + K_u^{n-i+1} N_v^{n-i+1} - k_{n-1+1} N^{n-i+1} = 0$$

doivent se déduire l'une de l'autre, posons $N^{n-i+1} = \lambda M^{n+i}$, la quantité λ étant différente de celle utilisée au nº 3. Nous avons

$$\lambda M_{uv}^{n+i} - \lambda_u M_v^{n+i} + [\lambda_u - \lambda K_v^{n-i+1}] M_u^{n+i}$$
$$+ [\lambda_{uv} - \lambda_u K_v^{n-i+1} - \lambda k_{n-1+1}] M^{n+i} = 0.$$

On a tout d'abord

$$\lambda_v = \lambda K_v^{n-i+1}$$

et le coefficient de M^{n+i} se réduit à

$$\lambda(K_{uv}^{n-i+1} - k_{n-1+1})_v - \lambda k_{n-1+1}.$$

On a donc

$$h_{n+i} = k_{n-1+2}, \quad \lambda_u = -\lambda H_u^{n+i}.$$

De la seconde relation, on déduit

$$(\log . \lambda)_{uv} = - H_{uv}^{n+i} = K_{uv}^{n-i+1},$$

d'où

$$h_{n+i+1} - h_{n+1} = - k_{n-1+2} + k_{n-1+1},$$

ou enfin, en tenant compte de la première égalité,

$$h_{n+i+1} = k_{n-i+1}.$$

En considérant les quantités N^{n+j} et M^{n-j+1}, on arriverait à la relation

$$k_{n+j} = h_{n-j+2},$$

qui ne diffère pas de la précédente; il suffit de poser $j = 2 - i$.

Ces relations exposent simplement que les invariants relatifs des équations de Laplace auxquelles satisfont U^{n+i} et V^{n-i+1}, ou M^{n-j+1} et N^{n+j} sont égaux.

En particulier on a $h_{n+1} = k_{n+1}$ ce qui se déduit du fait que la droite U^nV^n appartient à l'hyperquadrique Q. Les points U^n, V^n représentent d'ailleurs les tangentes aux asymptotiques u, v d'une surface $(\bar{x})$.

6. Dans notre *mémoire* cité plus haut, nous avons introduit des fonctions λ, μ telles que

$$U^{2n+2} = \lambda U, \quad V^{2n+2} = \mu V$$

et satisfaisant aux conditions

$$\lambda_u = 0, \quad (\log . \lambda)_v = H_v^{2n+2},$$
$$\mu_v = 0, \quad (\log . \mu)_u = K_u^{2n+2}.$$

On a

$$h_{n-i+1} = k_{n+i+1}. \tag{5}$$

De ces relations, on déduit

$$\lambda V^i + 2K^i U^{2n-i+1} = 0,$$
$$(i = 0, 1, \ldots, 2n+1)$$
$$\mu U^i + 2H^i V^{2n-i+1} = 0.$$

Il en résulte que l'on a

$$\lambda\mu V^i + 4K^i H^{2n-i-i} V^i = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda\mu + 4K^i H^{2n-i-1} = 0,$$

ou encore

$$K^i H^{2n-i+1} = K^0 H^{2n+1} = K^{2n+1} H^0.$$

On peut d'ailleurs déduire ces relations de la relation (5).

7. Supposons que la relation entre U^{n-3}, U^{n-2}, ..., U^{n+3} s'écrive

$$M^i = A_{i-3}U^{i-3} + A_{i-2}U^{i-2} + A_{i-1}U^{i-1} + A_iU^i + A_{i+1}U^{i+1} + A_{i+2}U^{i+2} + A_{i+3}U^{i+2} = 0.$$

En utilisant les relations précédentes, on en déduit

$$A_{i-3}H^{i-2}V^{2n-i+1} + A_{i-2}H^{i-2}V^{2n-i+2} + A_{i-1}H^{i-1}V^{2n-i+2} + A_iH^iV^{2n-1+1} + \\ + A_{i+1}H^{i+1}V^{2n-i} + A_{i+2}H^{i+2}V^{2n-i-1} + A_{i+2}H^{i+1}V^{2n-i-2} = 0.$$

Comme la suite L appartient à un espace à cinq dimensions, il ne peut exister plus d'une relation entre sept points consécutifs. La relation précédente est donc, à un facteur de proportionnalité près, la relation $N^{2n-i+1} = 0$.

Liège, le 7 septembre 1971.