Sur les fonctions continûment dérivables sur un ensemble compact

Laurent Loosveldt

en collaboration avec

Leonhard Frerick et Jochen Wengenroth (Universität Trier)

Lille – Séminaire d'analyse fonctionelle

19 novembre 2021

UNIVERSITÉ DU LUXEMBOURG

Comment définir le fait d'être continûment dérivable sur un ensemble compact?

Comment définir le fait d'être continûment dérivable sur un ensemble compact?

- Par restriction

Comment définir le fait d'être continûment dérivable sur un ensemble compact?

- Par restriction

Whitney (1934)

Une fonction f est la restriction à K d'une fonction continûment dérivable de $\mathbb{R}^d$, de différentielle df, si et seulement si

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in K}} \frac{f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x \rangle}{|y - x|} = 0,$$

uniformément en $x \in K$.

Comment définir le fait d'être continûment dérivable sur un ensemble compact?

- Par restriction

Whitney (1934)
Une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^d|K)$, de différentielle df, si et seulement si

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in K}} \frac{f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x \rangle}{|y - x|} = 0,$$

uniformément en $x \in K$.

Comment définir le fait d'être continûment dérivable sur un ensemble compact?

- Par restriction

> **Whitney (1934)**
> Une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^d|K)$, de différentielle df, si et seulement si
> $$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in K}} \frac{f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x\rangle}{|y - x|} = 0,$$
> uniformément en $x \in K$.

- Si le compact K est topologiquement régulier (l'adhérence de son intérieur)

Comment définir le fait d'être continûment dérivable sur un ensemble compact?

- Par restriction

Whitney (1934)
Une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^d|K)$, de différentielle df, si et seulement si

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in K}} \frac{f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x\rangle}{|y - x|} = 0,$$

uniformément en $x \in K$.

- Si le compact K est topologiquement régulier (l'adhérence de son intérieur)

$C^1_{\mathrm{int}}(K) = \{f \in C(K) : f|_{\mathring{K}} \in C^1(\mathring{K})$ et df s'étend continûment à $K\}$.

Notre proposition

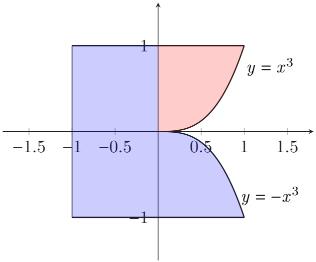
Une fonction f, continue sur K, appartient à $C^1(K)$ s'il existe une fonction continue df sur K à valeurs dans les applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in K$,

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in K}} \frac{f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x \rangle}{|y - x|} = 0,$$

Notre proposition

Une fonction f, continue sur K, appartient à $C^1(K)$ s'il existe une fonction continue df sur K à valeurs dans les applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in K$,

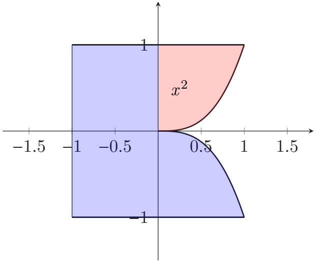
$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in K}} \frac{f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x \rangle}{|y - x|} = 0,$$



Notre proposition

Une fonction f, continue sur K, appartient à $C^1(K)$ s'il existe une fonction continue df sur K à valeurs dans les applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in K$,

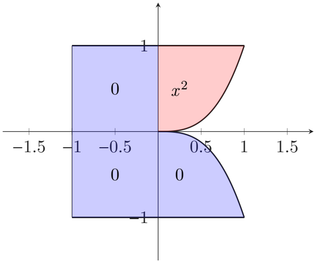
$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in K}} \frac{f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x \rangle}{|y - x|} = 0,$$



Notre proposition

Une fonction f, continue sur K, appartient à $C^1(K)$ s'il existe une fonction continue df sur K à valeurs dans les applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in K$,

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in K}} \frac{f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x \rangle}{|y - x|} = 0,$$



Notre proposition

Une fonction f, continue sur K, appartient à $C^1(K)$ s'il existe une fonction continue df sur K à valeurs dans les applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in K$,

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in K}} \frac{f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x \rangle}{|y - x|} = 0,$$

!! En général, une telle différentielle n'est pas unique !!
Pour cette raison, un bon outil pour étudier $C^1(K)$ est l'espace de jet

$$\mathcal{J}^1(K) = \{(f, df) : df \text{ est une différentielle continue de } f \text{ sur } K\}$$

équipé avec la norme naturelle

$$\|(f, df)\|_{\mathcal{J}^1(K)} = \|f\|_K + \|df\|_K,$$

Notre proposition

Une fonction f, continue sur K, appartient à $C^1(K)$ s'il existe une fonction continue df sur K à valeurs dans les applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in K$,

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in K}} \frac{f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x \rangle}{|y - x|} = 0,$$

!! En général, une telle différentielle n'est pas unique !!
Pour cette raison, un bon outil pour étudier $C^1(K)$ est l'espace de jet

$C^1(K) = \pi(\mathcal{J}^1(K))$ pour la projection $\pi(f, df) = f$

équipé avec la norme naturelle

$\|f\|_{C^1(K)} = \|f\|_K + \inf\{\|df\|_K : df$ est une différentielle continue de f sur $K\}$.

L'importance des chemins rectifiables de K

Une fonction $f \in C^1(K)$ n'est pas nécessairement lipschitzienne

L'importance des chemins rectifiables de K

Une fonction $f \in C^1(K)$ n'est pas nécessairement lipschitzienne car les segments dont les extrémités sont dans K et sur lesquels on aimerait appliquer le théorème des accroissements finis ne sont pas nécessairement contenus dans K.

L'importance des chemins rectifiables de K

Une fonction $f \in C^1(K)$ n'est pas nécessairement lipschitzienne car les segments dont les extrémités sont dans K et sur lesquels on aimerait appliquer le théorème des accroissements finis ne sont pas nécessairement contenus dans K.

Un chemin rectifiable est une fonction continue $\gamma : [a, b] \to K$ telle que la longueur

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| : a = t_0 < \cdots < t_n = b \right\}$$

est finie.

L'importance des chemins rectifiables de K

Une fonction $f \in C^1(K)$ n'est pas nécessairement lipschitzienne car les segments dont les extrémités sont dans K et sur lesquels on aimerait appliquer le théorème des accroissements finis ne sont pas nécessairement contenus dans K.

Lemme (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)
Soit $f \in C^1(K)$ et $x, y \in K$. Si df est une différentielle de f sur K et si x et y sont connectés par un chemin rectifiable $\gamma : [a, b] \to K$, alors

$$|f(y) - f(x)| \leq L(\gamma) \sup\{|df(z)| : z \in \gamma([a, b])\}.$$

L'importance des chemins rectifiables de K

Une fonction $f \in C^1(K)$ n'est pas nécessairement lipschitzienne car les segments dont les extrémités sont dans K et sur lesquels on aimerait appliquer le théorème des accroissements finis ne sont pas nécessairement contenus dans K.

Lemme (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)
Soit $f \in C^1(K)$ et $x, y \in K$. Si df est une différentielle de f sur K et si x et y sont connectés par un chemin rectifiable $\gamma : [a, b] \to K$, alors

$$|f(y) - f(x)| \leq L(\gamma) \sup\{|df(z)| : z \in \gamma([a, b])\}.$$

Idée de la démonstration : Pour tout $C > \sup\{|df(z)| : z \in \gamma([a, b])\}$, $\{t \in [a, b] : f(\gamma(t)) - f(x) \leq CL(\gamma_{|[a,t]})\}$ est compact.

Théorème fondamental du calcul intégral

Si $F : K \to \mathbb{R}^d$ est continu et si γ est un chemin rectifiable dans K, on définit l'intégrale de F le long de γ, $\int_\gamma F$, comme la limite de la somme de Riemann-Stieltjes

$$\sum_{j=1}^{n} \langle F(\gamma(\tau_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \rangle$$

où $a = t_0 < \ldots < t_n = b$, $\max\{t_j - t_{j-1} : 1 \leq j \leq n\} \to 0$ et $t_{j-1} \leq \tau_j \leq t_j$.

Théorème fondamental du calcul intégral

Si $F : K \to \mathbb{R}^d$ est continu et si γ est un chemin rectifiable dans K, on définit l'intégrale de F le long de γ, $\int_\gamma F$, comme la limite de la somme de Riemann-Stieltjes

$$\sum_{j=1}^{n} \langle F(\gamma(\tau_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\rangle$$

où $a = t_0 < \ldots < t_n = b$, $\max\{t_j - t_{j-1} : 1 \leq j \leq n\} \to 0$ et $t_{j-1} \leq \tau_j \leq t_j$.

- Si γ est absolument continu alors $F \circ \gamma$ est uniformément continu et

$$\int_\gamma F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle dt.$$

Théorème fondamental du calcul intégral

Si $F : K \to \mathbb{R}^d$ est continu et si γ est un chemin rectifiable dans K, on définit l'intégrale de F le long de γ, $\int_\gamma F$, comme la limite de la somme de Riemann-Stieltjes

$$\sum_{j=1}^{n} \langle F(\gamma(\tau_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \rangle$$

où $a = t_0 < \ldots < t_n = b$, $\max\{t_j - t_{j-1} : 1 \leq j \leq n\} \to 0$ et $t_{j-1} \leq \tau_j \leq t_j$.

- Si γ est absolument continu alors $F \circ \gamma$ est uniformément continu et

$$\int_\gamma F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt.$$

- Si γ est continûment dérivable et $F = df$, pour une fonction $f \in C^1(K)$, $\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

Théorème fondamental du calcul intégral

T.F.C.I. généralisé (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)

Pour toute fonction $f \in C^1(K)$ de différentielle continue df et pour tous chemins rectifiables $\gamma : [a,b] \to K$ on a

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Théorème fondamental du calcul intégral

T.F.C.I. généralisé (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)

Pour toute fonction $f \in C^1(K)$ de différentielle continue df et pour tous chemins rectifiables $\gamma : [a, b] \to K$ on a

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Idée de la démonstration : si $a = t_0 < \ldots < t_n = b$,

$$\begin{aligned}&\left|f(\gamma(t_j)) - f(\gamma(t_{j-1})) - \langle df(\gamma(t_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\rangle\right|\\ &\leq L(\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}) \sup\{|df(\gamma(t)) - df(\gamma(t_{j-1})| : t \in [t_{j-1}, t_j]\}.\end{aligned}$$

Théorème fondamental du calcul intégral

T.F.C.I. généralisé (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)
Pour toute fonction $f \in C^1(K)$ de différentielle continue df et pour tous chemins rectifiables $\gamma : [a,b] \to K$ on a

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Idée de la démonstration : si $a = t_0 < \ldots < t_n = b$,

$$\begin{aligned}&\left| f(\gamma(t_j)) - f(\gamma(t_{j-1})) - \langle df(\gamma(t_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\rangle \right| \\ &\leq L(\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}) \sup\{|df(\gamma(t)) - df(\gamma(t_{j-1}))| : t \in [t_{j-1}, t_j]\}.\end{aligned}$$

On écrit alors $f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ comme une somme télescopique avant d'y insérer ces termes. La continuité uniforme de df permet de conclure!

$$C^1(K) \neq C^1_{\mathrm{int}}(K)$$

$C^1(K) \neq C^1_{\text{int}}(K)$

Notons C l'ensemble triadique de Cantor et U son complémentaire dans $(0,1)$. L'ouvert Ω est construit à partir de $U \times (0,1)$ en y retirant des boules fermées disjointes $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui s'accumulent précisément en $C \times [0,1]$ et telles que la somme des diamètres n'excède pas $\frac{1}{4}$.

$C^1(K) \neq C^1_{\text{int}}(K)$

Notons C l'ensemble triadique de Cantor et U son complémentaire dans $(0,1)$. L'ouvert Ω est construit à partir de $U \times (0,1)$ en y retirant des boules fermées disjointes $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ qui s'accumulent précisément en $C \times [0,1]$ et telles que la somme des diamètres n'excède pas $\frac{1}{4}$.

$K = \overline{\Omega}$ est topologiquement régulier.

$C^1(K) \neq C^1_{\text{int}}(K)$

Notons C l'ensemble triadique de Cantor et U son complémentaire dans $(0,1)$. L'ouvert Ω est construit à partir de $U \times (0,1)$ en y retirant des boules fermées disjointes $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui s'accumulent précisément en $C \times [0,1]$ et telles que la somme des diamètres n'excède pas $\frac{1}{4}$.

$K = \overline{\Omega}$ est topologiquement régulier.

Si f est la fonction de Cantor sur $[0,1]$, on considère la fonction F définie sur K par $F(x,y) = f(x)$.

$C^1(K) \neq C^1_{\text{int}}(K)$

Notons C l'ensemble triadique de Cantor et U son complémentaire dans $(0,1)$. L'ouvert Ω est construit à partir de $U \times (0,1)$ en y retirant des boules fermées disjointes $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui s'accumulent précisément en $C \times [0,1]$ et telles que la somme des diamètres n'excède pas $\frac{1}{4}$.

$K = \overline{\Omega}$ est topologiquement régulier.

Si f est la fonction de Cantor sur $[0,1]$, on considère la fonction F définie sur K par $F(x,y) = f(x)$. On a $F \in C^1_{\text{int}}(K)$ par continuité et $\partial_1 F = \partial_2 F = 0$ sur $\Omega = \mathring{K}$.

$C^1(K) \neq C^1_{\text{int}}(K)$

Notons C l'ensemble triadique de Cantor et U son complémentaire dans $(0,1)$. L'ouvert Ω est construit à partir de $U \times (0,1)$ en y retirant des boules fermées disjointes $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui s'accumulent précisément en $C \times [0,1]$ et telles que la somme des diamètres n'excède pas $\frac{1}{4}$.

$K = \overline{\Omega}$ est topologiquement régulier.

Si f est la fonction de Cantor sur $[0,1]$, on considère la fonction F définie sur K par $F(x,y) = f(x)$. On a $F \in C^1_{\text{int}}(K)$ par continuité et $\partial_1 F = \partial_2 F = 0$ sur $\Omega = \mathring{K}$.

Si $F \in C^1(K)$, $dF = (0,0)$ et si on considère $\gamma : [0,1] \to K$ la paramétrisation évident d'une droite horizontale traversant K de gauche à droite

$C^1(K) \neq C^1_{\text{int}}(K)$

Notons C l'ensemble triadique de Cantor et U son complémentaire dans $(0,1)$. L'ouvert Ω est construit à partir de $U \times (0,1)$ en y retirant des boules fermées disjointes $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui s'accumulent précisément en $C \times [0,1]$ et telles que la somme des diamètres n'excède pas $\frac{1}{4}$.

$K = \overline{\Omega}$ est topologiquement régulier.

Si f est la fonction de Cantor sur $[0,1]$, on considère la fonction F définie sur K par $F(x,y) = f(x)$. On a $F \in C^1_{\text{int}}(K)$ par continuité et $\partial_1 F = \partial_2 F = 0$ sur $\Omega = \mathring{K}$.

Si $F \in C^1(K)$, $dF = (0,0)$ et si on considère $\gamma : [0,1] \to K$ la paramétrisation évident d'une droite horizontale traversant K de gauche à droite, on a

$$\int_\gamma dF = 0 \quad \text{tandis que} \quad F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = f(1) - f(0) = 1.$$

Complétude de $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$

Cas des ensembles avec une infinité de composantes connexes

(L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)
Si K est un ensemble compact avec une infinité de composantes connexes, alors $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ n'est pas complet.

Cas des ensembles avec une infinité de composantes connexes

(L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)
Si K est un ensemble compact avec une infinité de composantes connexes, alors $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ n'est pas complet.

1. $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ suite de sous-ensembles ouverts-fermés de K, deux à deux disjoints et avec une infinité de composantes connexes

Cas des ensembles avec une infinité de composantes connexes

(L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)
Si K est un ensemble compact avec une infinité de composantes connexes, alors $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ n'est pas complet.

1. $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ suite de sous-ensembles ouverts-fermés de K, deux à deux disjoints et avec une infinité de composantes connexes. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit $x_j \in K_j$.

Cas des ensembles avec une infinité de composantes connexes

(L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)
Si K est un ensemble compact avec une infinité de composantes connexes, alors $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ n'est pas complet.

1. $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ suite de sous-ensembles ouverts-fermés de K, deux à deux disjoints et avec une infinité de composantes connexes. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit $x_j \in K_j$.
2. Par compacité, on peut extraire une sous-suite $x_{k(j)} \to x_0 \in K$

Cas des ensembles avec une infinité de composantes connexes

(L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)
Si K est un ensemble compact avec une infinité de composantes connexes, alors $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ n'est pas complet.

1. $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ suite de sous-ensembles ouverts-fermés de K, deux à deux disjoints et avec une infinité de composantes connexes. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit $x_j \in K_j$.
2. Par compacité, on peut extraire une sous-suite $x_{k(j)} \longrightarrow x_0 \in K$, ce point limite ne peut appartenir à un des $K_{k(j)}$ vu que ces ensembles sont ouverts et deux à deux disjoints.

Cas des ensembles avec une infinité de composantes connexes

(L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)
Si K est un ensemble compact avec une infinité de composantes connexes, alors $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ n'est pas complet.

1. $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ suite de sous-ensembles ouverts-fermés de K, deux à deux disjoints et avec une infinité de composantes connexes. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit $x_j \in K_j$.
2. Par compacité, on peut extraire une sous-suite $x_{k(j)} \to x_0 \in K$, ce point limite ne peut appartenir à un des $K_{k(j)}$ vu que ces ensembles sont ouverts et deux à deux disjoints.
3. $$f_n(x) = \begin{cases} |x_{k(j)} - x_0| & \text{si } x \in K_{k(j)} \text{ et } j \leq n \\ 0 & \text{si } x \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{n} K_{k(j)}. \end{cases}$$

Cas des ensembles avec une infinité de composantes connexes

(L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)
Si K est un ensemble compact avec une infinité de composantes connexes, alors $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ n'est pas complet.

1. $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ suite de sous-ensembles ouverts-fermés de K, deux à deux disjoints et avec une infinité de composantes connexes. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit $x_j \in K_j$.
2. Par compacité, on peut extraire une sous-suite $x_{k(j)} \to x_0 \in K$, ce point limite ne peut appartenir à un des $K_{k(j)}$ vu que ces ensembles sont ouverts et deux à deux disjoints.
3. $$f_n(x) = \begin{cases} |x_{k(j)} - x_0| & \text{si } x \in K_{k(j)} \text{ et } j \leq n \\ 0 & \text{si } x \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{n} K_{k(j)}. \end{cases}$$

Cas des ensembles avec une infinité de composantes connexes

$$f(x) = \begin{cases} |x_{k(j)} - x_0| & \text{si } x \in K_{k(j)} \text{ pour un } j \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } x \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_{k(j)}. \end{cases}$$

Cas des ensembles avec une infinité de composantes connexes

$$f(x) = \begin{cases} |x_{k(j)} - x_0| & \text{si } x \in K_{k(j)} \text{ pour un } j \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } x \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_{k(j)}. \end{cases}$$

Pour tout j,

$$\frac{|f(x_{k(j)}) - f(x_0)|}{|x_{k(j)} - x_0|} = 1.$$

K a un nombre fini de composantes connexes

K a un nombre fini de composantes connexes

K est ponctuellement régulier $\Rightarrow$ $(\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)})$ Banach

$\Uparrow$ $\nearrow$ $\Downarrow$

Pour tout $x \in K$, il existe $C_x > 0$ tel que $\sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)}$ $\Leftarrow$ $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ Banach

K a un nombre fini de composantes connexes

$$\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\begin{array}{c}\text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} \\ C_x > 0 \text{ tel que} \\ \sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)}\end{array} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach}
\end{array}$$

On dit qu'un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^d$ est *(Whitney) régulier* s'il existe une constante $C > 0$ tel que tous points $x, y \in A$ peuvent être joints par un chemin rectifiable dans A de longueur bornée par $C|x - y|$.

K a un nombre fini de composantes connexes

$$\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach} \\
C_x > 0 \text{ tel que} & & \\
\sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} & &
\end{array}$$

On dit que A est ***ponctuellement*** *(Whitney) régulier* si pour tout $x \in A$ il existe un voisinage V_x de x dans A et $C_x > 0$ tels que tout $y \in V_x$ est joint à x par un chemin rectifiable dans A de longueur bornée par $C_x|x - y|$.

K a un nombre fini de composantes connexes

$$
\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Longrightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} & \Longleftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach} \\
C_x > 0 \text{ tel que} & & \\
\sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} & &
\end{array}
$$

K a un nombre fini de composantes connexes

K est ponctuellement régulier $\Rightarrow$ $(\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)})$ Banach

$\Uparrow$ $\nearrow$ $\Downarrow$

Pour tout $x \in K$, il existe $C_x > 0$ tel que $\sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)}$ $\Leftarrow$ $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ Banach

K a un nombre fini de composantes connexes

$$\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\text{Pour tout } x \in K\text{, il existe} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach} \\
C_x > 0 \text{ tel que} & & \\
\sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} & &
\end{array}$$

1. Considérons $((f_j; df_j))_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)})$, par complétude de $(C(K), \|\cdot\|_K)$ on obtient des limites uniformes f et df.
2. Étant donné $x \in K$ et un chemin rectifiable γ_y de x vers y de longueur $L(\gamma_y) \leq C_x|x-y|$

$$f_j(y) - f_j(x) - \langle df(x), y-x \rangle = \int_{\gamma_y} (df_j - df(x))$$

K a un nombre fini de composantes connexes

K est ponctuellement régulier	$\Rightarrow$	$(\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)})$ Banach
$\Uparrow$	$\nearrow$	$\Downarrow$
Pour tout $x \in K$, il existe $C_x > 0$ tel que $\sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{\|f(y) - f(x)\|}{\|y - x\|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)}$	$\Leftarrow$	$(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ Banach

1. Considérons $((f_j; df_j))_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)})$, par complétude de $(C(K), \|\cdot\|_K)$ on obtient des limites uniformes f et df.
2. Étant donné $x \in K$ et un chemin rectifiable γ_y de x vers y de longueur $L(\gamma_y) \leq C_x|x - y|$

$$f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x \rangle = \int_{\gamma_y} (df - df(x))$$

K a un nombre fini de composantes connexes

$$
\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach} \\
C_x > 0 \text{ tel que} & & \\
\sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} & &
\end{array}
$$

En passant au quotient.

K a un nombre fini de composantes connexes

$$\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Longrightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\text{Pour tout } x \in K \text{, il existe } C_x > 0 \text{ tel que } \sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} & \Longleftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach}
\end{array}$$

K a un nombre fini de composantes connexes

$$\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\begin{array}{c}\text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} \\ C_x > 0 \text{ tel que} \\ \sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)}\end{array} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach}
\end{array}$$

Fixons $x \in K$, pour tout $y \in K \setminus \{x\}$, on définit une application linéaire et continue sur $C^1(K)$ par

$$\Phi_y(f) = \frac{f(y) - f(x)}{|y - x|} \quad \forall f \in C^1(K).$$

On conclut par Banach-Steinhaus.

K a un nombre fini de composantes connexes

$$
\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Longrightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow\!\!\!\!\nearrow & \Downarrow \\
\begin{array}{c} \text{Pour tout } x \in K \text{, il existe} \\ C_x > 0 \text{ tel que} \\ \sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} \end{array} & \Longleftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach}
\end{array}
$$

K a un nombre fini de composantes connexes

$$
\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\color{blue}{\Uparrow} & \nearrow & \Downarrow \\
\begin{array}{c}\text{Pour tout } x \in K \text{, il existe} \\ C_x > 0 \text{ tel que} \\ \sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)}\end{array} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach}
\end{array}
$$

K a un nombre fini de composantes connexes

UNIVERSITÉ DU LUXEMBOURG

$$
\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\begin{array}{c}\text{Pour tout } x \in K \text{, il existe} \\ C_x > 0 \text{ tel que} \\ \sup_{\substack{y\in K \\ y\neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)}\end{array} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach}
\end{array}
$$

$$d_\varepsilon(y) := \inf\{L_\gamma \ : \ \gamma \text{ chemin rectifiable de } x \text{ vers } y \text{ dans } K_{2\varepsilon}\}.$$

($K_{2\varepsilon}$ voisinage ouvert et connexe de K)

K a un nombre fini de composantes connexes

$$
\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach} \\
C_x > 0 \text{ tel que} & & \\
\sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} & &
\end{array}
$$

$$d_\varepsilon(y) := \inf\{L_\gamma \ : \ \gamma \text{ chemin rectifiable de } x \text{ vers } y \text{ dans } K_{2\varepsilon}\}.$$

$y_0 \in K$ fixé, définissons $u_\varepsilon(y) = \min\{d_\varepsilon(y), d_\varepsilon(y_0)\}$. Si y et y' sont suffisamment proches $K_{2\varepsilon}$, on a

$$|u_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(y')| \leq |y - y'|,$$

K a un nombre fini de composantes connexes

$$\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\begin{array}{c} \text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} \\ C_x > 0 \text{ tel que} \\ \sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} \end{array} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach}
\end{array}$$

$$d_\varepsilon(y) := \inf\{L_\gamma \ : \ \gamma \text{ chemin rectifiable de } x \text{ vers } y \text{ dans } K_{2\varepsilon}\}.$$

$y_0 \in K$ fixé, définissons $u_\varepsilon(y) = \min\{d_\varepsilon(y), d_\varepsilon(y_0)\}$. Si ϕ est une fonction C^∞, positive, à support dans $B(0,\varepsilon)$ et d'intégrale 1, le produit de convolution $u_\varepsilon * \phi$, défini sur K_ε, est une function C^∞.

$$|(u_\varepsilon * \phi)(x) - (u_\varepsilon * \phi)(y_0)| \leq C_x(d_\varepsilon(y_0) + d)|x - y_0|$$

K a un nombre fini de composantes connexes

$$\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach} \\
C_x > 0 \text{ tel que} & & \\
\sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} & &
\end{array}$$

$$d_\varepsilon(y) := \inf\{L_\gamma \ : \ \gamma \text{ chemin rectifiable de } x \text{ vers } y \text{ dans } K_{2\varepsilon}\}.$$

$y_0 \in K$ fixé

$\operatorname{supp} \phi \longrightarrow \{0\}$

$$d_\varepsilon(y_0) \leq C_x(d_\varepsilon(y_0) + d)|x - y_0|.$$

K a un nombre fini de composantes connexes

$$\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \nearrow & \Downarrow \\
\text{Pour tout } x \in K, \text{ il existe} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach} \\
C_x > 0 \text{ tel que} & & \\
\sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)} & &
\end{array}$$

Pour tout $y_0 \in B(x, \frac{1}{2C_x}) \cap K$, il existe un chemin rectifiable de x vers y_0 in $K_{2\varepsilon}$ de longueur bornée par $2C_x d|x - y_0| + \varepsilon$. En utilisant un paramétrage par abscisse curviligne pour ces chemins, on obtient une famille de fonctions uniformément équicontinue.

K a un nombre fini de composantes connexes

$$\begin{array}{ccc}
K \text{ est ponctuellement régulier} & \Rightarrow & (\mathcal{J}^1(K), \|\cdot\|_{\mathcal{J}^1(K)}) \text{ Banach} \\
\Uparrow & \Nearrow & \Downarrow \\
\begin{array}{c}\text{Pour tout } x \in K \text{, il existe} \\ C_x > 0 \text{ tel que} \\ \sup_{\substack{y \in K \\ y \neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C_x \|f\|_{C^1(K)}\end{array} & \Leftarrow & (C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)}) \text{ Banach}
\end{array}$$

Pour tout $y_0 \in B(x, \frac{1}{2C_x}) \cap K$, il existe un chemin rectifiable de x vers y_0 in $K_{2\varepsilon}$ de longueur bornée par $2C_x d|x - y_0| + \varepsilon$. En utilisant un paramétrage par abscisse curviligne pour ces chemins, on obtient une famille de fonctions uniformément équicontinues.

Par Arzelà-Ascoli, on trouve une sous-suite convergente donc la limite est un chemin rectifiable de longueur bornée par $2C_x d|x - y_0|$.

Caractérisation de la complétude de $C^1(K)$ (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)

Soit K un ensemble compact, $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$ est un espace de Banach si et seulement si K a un nombre fini de composantes connexes qui sont toutes ponctuellement Whitney régulières.

Densité de $C^1(\mathbb{R}^d|K)$

Formalisation du problème

On désire montrer que

$$\overline{C^1(\mathbb{R}^d|K)}^{C^1(K)} = C^1(K).$$

Formalisation du problème

On désire montrer que

$$\overline{\mathscr{E}^1(K)}^{\mathscr{J}^1(K)} = \mathscr{J}^1(K).$$

Formalisation du problème

On désire montrer que

$$\overline{\mathscr{E}^1(K)}^{\mathcal{J}^1(K)} = \mathcal{J}^1(K).$$

Pour un compact général K, toutes les procédures standards d'approximation comme la convolution avec des fonctions test ou des "recollages" via des partitions de l'unité ne s'appliquent pas facilement.

Formalisation du problème

On désire montrer que

$$\overline{\mathscr{E}^1(K)}^{\mathcal{J}^1(K)} = \mathcal{J}^1(K).$$

Pour un compact général K, toutes les procédures standards d'approximation comme la convolution avec des fonctions test ou des "recollages" via des partitions de l'unité ne s'appliquent pas facilement.

Conséquence du théorème de Hahn-Banach

Il suffit de montrer que, si Φ une application linéaire continue sur $C(K)^{d+1}$ telle que $\Phi_{|\mathscr{E}^1(K)} = 0$ alors $\Phi_{|\mathcal{J}^1(K)} = 0$

Formalisation du problème

On désire montrer que

$$\overline{\mathscr{E}^1(K)}^{\mathscr{J}^1(K)} = \mathscr{J}^1(K).$$

Pour un compact général K, toutes les procédures standards d'approximation comme la convolution avec des fonctions test ou des "recollages" via des partitions de l'unité ne s'appliquent pas facilement.

Conséquence du théorème de Hahn-Banach

Il suffit de montrer que, si Φ une application linéaire continue sur $C(K)^{d+1}$ telle que $\Phi_{|\mathscr{E}^1(K)} = 0$ alors $\Phi_{|\mathscr{J}^1(K)} = 0$

Considérons une telle application Φ.

Divergence de mesures

Par le théorème de représentation de Riesz, on sait que Φ peut être décrit par $(\mu; \mu_1, \cdots, \mu_d)$: pour tout $(f, f_1, \cdots, f_d) \in C(K)^{d+1}$,

$$\Phi((f, f_1, \cdots, f_d)) = \int f \, d\mu + \int f_1 \, d\mu_1 + \ldots + \int f_d \, d\mu_d.$$

Divergence de mesures

Par le théorème de représentation de Riesz, on sait que Φ peut être décrit par $(\mu; \mu_1, \cdots, \mu_d)$: pour tout $(f, f_1, \cdots, f_d) \in C(K)^{d+1}$,

$$\Phi((f, f_1, \cdots, f_d)) = \int f \, d\mu + \int f_1 \, d\mu_1 + \ldots + \int f_d \, d\mu_d.$$

Divergence de mesures

Par le théorème de représentation de Riesz, on sait que Φ peut être décrit par $(\mu; \mu_1, \cdots, \mu_d)$: pour tout $(f, f_1, \cdots, f_d) \in C(K)^{d+1}$,

$$\Phi((f, f_1, \cdots, f_d)) = \int f \, d\mu + \int f_1 \, d\mu_1 + \ldots + \int f_d \, d\mu_d .$$

Comme $\Phi_{|\mathscr{E}^1(K)} = 0$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\int \varphi \, d\mu = -\int \partial_1 \varphi \, d\mu_1 - \cdots - \int \partial_d \varphi \, d\mu_d$$

Divergence de mesures

Par le théorème de représentation de Riesz, on sait que Φ peut être décrit par $(\mu; \mu_1, \cdots, \mu_d)$: pour tout $(f, f_1, \cdots, f_d) \in C(K)^{d+1}$,

$$\Phi((f, f_1, \cdots, f_d)) = \int f \, d\mu + \int f_1 \, d\mu_1 + \ldots + \int f_d \, d\mu_d.$$

Comme $\Phi_{|\mathscr{E}^1(K)} = 0$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\mu[\varphi] = (\partial_1 \mu_1)[\varphi] + \cdots + (\partial_d \mu_d)[\varphi]$$

Divergence de mesures

Par le théorème de représentation de Riesz, on sait que Φ peut être décrit par $(\mu; \mu_1, \cdots, \mu_d)$: pour tout $(f, f_1, \cdots, f_d) \in C(K)^{d+1}$,

$$\Phi((f, f_1, \cdots, f_d)) = \int f \, d\mu + \int f_1 \, d\mu_1 + \ldots + \int f_d \, d\mu_d.$$

$$\mu = \operatorname{div}(T)$$

où $T = (\mu_1, \cdots, \mu_d)$ est un champ vectoriel de mesure (charge).

Solutions fondamentales

Si $\gamma : [a, b] \to K$ est un chemin rectifiable (lipschitzien) et $F = (F_1, \cdots, F_d) \in C(K)^d$,

$$\int_\gamma F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

Solutions fondamentales

Si $\gamma : [a,b] \to K$ est un chemin rectifiable (lipschitzien) et $F = (F_1, \cdots, F_d) \in C(K)^d$,

$$\int_\gamma F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt = \sum_{j=1}^d \int_a^b F_j(\gamma(t))\gamma_j'(t) \, dt$$

Solutions fondamentales

Si $\gamma : [a, b] \to K$ est un chemin rectifiable (lipschitzien) et $F = (F_1, \cdots, F_d) \in C(K)^d$,

$$\int_\gamma F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt = \sum_{j=1}^d \int_a^b F_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)\, dt = \sum_{j=1}^d \int F_j\, d\mu_j^{(\gamma)},$$

où $\mu_j^{(\gamma)}$ est l'image par γ de la mesure de densité γ_j' sur $[a, b]$.

Solutions fondamentales

Si $\gamma : [a,b] \to K$ est un chemin rectifiable (lipschitzien) et $F = (F_1, \cdots, F_d) \in C(K)^d$,

$$\int_\gamma F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt = \sum_{j=1}^d \int_a^b F_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)\, dt = \sum_{j=1}^d \int F_j \, d\mu_j^{(\gamma)},$$

où $\mu_j^{(\gamma)}$ est l'image par γ de la mesure de densité γ_j' sur $[a,b]$. On pose $T_\gamma = (\mu_1^{(\gamma)}, \cdots, \mu_d^{(\gamma)})$

Solutions fondamentales

Si $\gamma : [a,b] \to K$ est un chemin rectifiable (lipschitzien) et $F = (F_1, \cdots, F_d) \in C(K)^d$,

$$\int_\gamma F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt = \sum_{j=1}^d \int_a^b F_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)\, dt = \sum_{j=1}^d \int F_j \, d\mu_j^{(\gamma)},$$

où $\mu_j^{(\gamma)}$ est l'image par γ de la mesure de densité γ_j' sur $[a,b]$. On pose $T_\gamma = (\mu_1^{(\gamma)}, \cdots, \mu_d^{(\gamma)})$,

$$\operatorname{div} T_\gamma = \delta_{\gamma(a)} - \delta_{\gamma(b)}$$

Un théorème de Smirnov

Si Γ est l'ensemble de tous les chemins rectifiables lipschitziens.

Smirnov (1993)

Toute charge T à support compact telle que $\mathrm{div}(T)$ est une mesure signée peut être décomposée en éléments de Γ, i.e., il existe une mesure positive finie ν sur Γ telle que

$$T = \int_\Gamma T_\gamma \, d\nu(\gamma) \text{ et } \|T\| = \int_\Gamma \|T_\gamma\| \, d\nu(\gamma).$$

$C^1(\mathbb{R}^d|K)$ est toujours dense dans $C^1(K)$

Theorem (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)
Pour tout compact K, l'espace des restrictions à K des fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}^d$ est dense dans $(C^1(K), \|\cdot\|_{C^1(K)})$.

Quelques comparaisons

$C^1(\mathbb{R}^d|K)$ et $C^1(K)$

Critère pour l'égalité $C^1(\mathbb{R}^d|K) = C^1(K)$ (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)

$C^1(K) = C^1(\mathbb{R}^d|K)$ avec des normes équivalentes si et seulement si K a un nombre fini de composantes connexes et que celles-ci sont toutes Whitney régulières.

$C^1(\mathbb{R}^d|K)$ et $C^1(K)$

Critère pour l'égalité $C^1(\mathbb{R}^d|K) = C^1(K)$ (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)

$C^1(K) = C^1(\mathbb{R}^d|K)$ avec des normes équivalentes si et seulement si K a un nombre fini de composantes connexes et que celles-ci sont toutes Whitney régulières.

Il s'agit d'une réponse satisfaisante dans le contexte des espaces de Banach, pas en général.

$C^1(\mathbb{R}^d|K)$ et $C^1(K)$

Critère pour l'égalité $C^1(\mathbb{R}^d|K) = C^1(K)$ (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)
$C^1(K) = C^1(\mathbb{R}^d|K)$ avec des normes équivalentes si et seulement si K a un nombre fini de composantes connexes et que celles-ci sont toutes Whitney régulières.

Il s'agit d'une réponse satisfaisante dans le contexte des espaces de Banach, pas en général.

Remarque : l'égalité (algébrique) $C^1(\mathbb{R}^d|K) = C^1(K)$ a des propriétés de stabilités assez pauvres :

$C^1(\mathbb{R}^d|K)$ et $C^1(K)$

Critère pour l'égalité $C^1(\mathbb{R}^d|K) = C^1(K)$ (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)
$C^1(K) = C^1(\mathbb{R}^d|K)$ avec des normes équivalentes si et seulement si K a un nombre fini de composantes connexes et que celles-ci sont toutes Whitney régulières.

Il s'agit d'une réponse satisfaisante dans le contexte des espaces de Banach, pas en général.
Remarque : l'égalité (algébrique) $C^1(\mathbb{R}^d|K) = C^1(K)$ a des propriétés de stabilités assez pauvres :

- Deux moitiés d'un cœur brisé se comportent mieux que le cœur intact...

$C^1(\mathbb{R}^d|K)$ et $C^1(K)$

Critère pour l'égalité $C^1(\mathbb{R}^d|K) = C^1(K)$ (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)

$C^1(K) = C^1(\mathbb{R}^d|K)$ avec des normes équivalentes si et seulement si K a un nombre fini de composantes connexes et que celles-ci sont toutes Whitney régulières.

Il s'agit d'une réponse satisfaisante dans le contexte des espaces de Banach, pas en général.

Remarque : l'égalité (algébrique) $C^1(\mathbb{R}^d|K) = C^1(K)$ a des propriétés de stabilités assez pauvres :

- Deux moitiés d'un cœur brisé se comportent mieux que le cœur intact...
- Considérons $M = \{0\} \cup \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ et $K = M \times [0,1]$, on a $C^1(K) \neq C^1(\mathbb{R}^2|K)$.

Une conjecture de Whitney

Whitney (1934)

Soit K un compact topologiquement régulier. Si $\mathring{K}$ est Whitney régulier, alors $C^1_{\text{int}}(K) = C^1(\mathbb{R}^d|K)$.

Une conjecture de Whitney

Whitney (1934)

Soit K un compact topologiquement régulier. Si $\mathring{K}$ est Whitney régulier, alors $C^1_{\text{int}}(K) = C^1(\mathbb{R}^d|K)$.

Conjecture de Whitney : qu'en est-il de la réciproque?

Une conjecture de Whitney

Whitney (1934)

Soit K un compact topologiquement régulier. Si $\mathring{K}$ est Whitney régulier, alors $C^1_{\text{int}}(K) = C^1(\mathbb{R}^d|K)$.

Conjecture de Whitney : qu'en est-il de la réciproque?

Critère pour l'égalité $C^1(K) = C^1_{\text{int}}(K)$ (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)

Soit K un compact topologiquement régulier et supposons que, pour tout $x \in \partial K$, il existe $C_x > 0$ et un voisinage V_x de x dans K tel que chaque $y \in V_x$ peut être joint depuis x par un chemin rectifiable dans $\mathring{K} \cup \{x, y\}$ de longueur bornée par $C_x|x-y|$. Alors $C^1_{\text{int}}(K) = C^1(K)$.

Réponse à la conjecture de Whitney

Notons Ω le disque unité ouvert dans $\mathbb{R}^2$ duquel on retire des suffisamment petites boules disjointes qui s'accumulent précisément en $\{0\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Réponse à la conjecture de Whitney

Notons Ω le disque unité ouvert dans $\mathbb{R}^2$ duquel on retire des suffisamment petites boules disjointes qui s'accumulent précisément en $\{0\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dans ce cas, $K = \overline{\Omega}$ est connexe, topologiquement régulier et Whitney régulier.

Réponse à la conjecture de Whitney

Notons Ω le disque unité ouvert dans $\mathbb{R}^2$ duquel on retire des suffisamment petites boules disjointes qui s'accumulent précisément en $\{0\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dans ce cas, $K = \overline{\Omega}$ est connexe, topologiquement régulier et Whitney régulier. En particulier, on a $C^1(\mathbb{R}^2|K) = C^1(K)$.

Réponse à la conjecture de Whitney

Notons Ω le disque unité ouvert dans $\mathbb{R}^2$ duquel on retire des suffisamment petites boules disjointes qui s'accumulent précisément en $\{0\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dans ce cas, $K = \overline{\Omega}$ est connexe, topologiquement régulier et Whitney régulier. En particulier, on a $C^1(\mathbb{R}^2|K) = C^1(K)$.

$\mathring{K}$ n'est pas Whitney régulier, parce que $\{0\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ n'est pas contenu dans $\mathring{K}$.

Réponse à la conjecture de Whitney

Notons Ω le disque unité ouvert dans $\mathbb{R}^2$ duquel on retire des suffisamment petites boules disjointes qui s'accumulent précisément en $\{0\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
Dans ce cas, $K = \overline{\Omega}$ est connexe, topologiquement régulier et Whitney régulier. En particulier, on a $C^1(\mathbb{R}^2|K) = C^1(K)$.
$\overset{\circ}{K}$ n'est pas Whitney régulier, parce que $\{0\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ n'est pas contenu dans $\overset{\circ}{K}$.
Les hypothèses du dernier critère étant satisfaites $C^1(K) = C^1_{\text{int}}(K)$.

Égalité entre $C^1(K)$ and $C^1(\mathbb{R}|K)$

Égalité entre $C^1(K)$ and $C^1(\mathbb{R}|K)$

Si K est un compact de $\mathbb{R}$ avec un nombre infini de composantes connexes, pour tout $\xi \in K$, soit

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \left\{ \frac{\sup\{|y-\xi| \; : \; y \in G\}}{\ell(G)} \; : \; G \text{ trou } \subseteq (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \right\}$$

Égalité entre $C^1(K)$ and $C^1(\mathbb{R}|K)$

Si K est un compact de $\mathbb{R}$ avec un nombre infini de composantes connexes, pour tout $\xi \in K$, soit

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \left\{ \frac{\sup\{|y-\xi| \,:\, y \in G\}}{\ell(G)} \,:\, G \text{ trou } \subseteq (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \right\}$$

Théorème (L. Frerick, L.L., J. Wengenroth)
Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact set wvec un nombre infini de composantes connexes.
On a $C^1(K) = C^1(\mathbb{R}|K)$ si et seulement si $\sigma(\xi) < \infty$ pour tout $\xi \in K$.

Quelques cas concrets

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \left\{ \frac{\sup\{|y-\xi| \ : \ y \in G\}}{\ell(G)} \ : \ G \text{ trou } \subseteq (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \right\}$$

Quelques cas concrets

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \left\{ \frac{\sup\{|y-\xi| \ : \ y \in G\}}{\ell(G)} \ : \ G \text{ trou } \subseteq (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \right\}$$

1. L'ensemble de Cantor K vérifie $\sigma(\xi) = \infty$ pour tout $\xi \in K$ donc $C^1(K) \neq C^1(\mathbb{R}|K)$.

Quelques cas concrets

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup \left\{ \frac{\sup\{|y-\xi| \,:\, y \in G\}}{\ell(G)} \;:\; G \text{ trou } \subseteq (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \right\}$$

1. L'ensemble de Cantor K vérifie $\sigma(\xi) = \infty$ pour tout $\xi \in K$ donc $C^1(K) \neq C^1(\mathbb{R}|K)$.
2. $K = \{0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ avec une suite décroissante $x_n \to 0$.

Quelques cas concrets

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \left\{ \frac{\sup\{|y-\xi| \,:\, y \in G\}}{\ell(G)} \;:\; G \text{ trou } \subseteq (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \right\}$$

1. L'ensemble de Cantor K vérifie $\sigma(\xi) = \infty$ pour tout $\xi \in K$ donc $C^1(K) \neq C^1(\mathbb{R}|K)$.
2. $K = \{0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ avec une suite décroissante $x_n \to 0$.
   - $\sigma(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Quelques cas concrets

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup \left\{ \frac{\sup\{|y-\xi| \,:\, y \in G\}}{\ell(G)} \;:\; G \text{ trou } \subseteq (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \right\}$$

1. L'ensemble de Cantor K vérifie $\sigma(\xi) = \infty$ pour tout $\xi \in K$ donc $C^1(K) \neq C^1(\mathbb{R}|K)$.
2. $K = \{0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ avec une suite décroissante $x_n \to 0$.
   - $\sigma(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - $\sigma(0) = \limsup \frac{x_n}{x_n - x_{n+1}}$

Quelques cas concrets

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \left\{ \frac{\sup\{|y-\xi| \,:\, y \in G\}}{\ell(G)} \;:\; G \text{ trou } \subseteq (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \right\}$$

1. L'ensemble de Cantor K vérifie $\sigma(\xi) = \infty$ pour tout $\xi \in K$ donc $C^1(K) \neq C^1(\mathbb{R}|K)$.
2. $K = \{0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ avec une suite décroissante $x_n \to 0$.
   - $\sigma(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - $\sigma(0) = \limsup \frac{x_n}{x_n - x_{n+1}}$

   $\Rightarrow$ fini pour des suites avec décroissance rapide comme $x_n = a^{-n}$ avec $a > 1$ mais infini pour des suites plus lentes comme $x_n = n^{-p}$ ($p > 0$)

Quelques cas concrets

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup \left\{ \frac{\sup\{|y-\xi| \ : \ y \in G\}}{\ell(G)} \ : \ G \text{ trou } \subseteq (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \right\}$$

1. L'ensemble de Cantor K vérifie $\sigma(\xi) = \infty$ pour tout $\xi \in K$ donc $C^1(K) \neq C^1(\mathbb{R}|K)$.
2. $K = \{0\} \cup \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ avec une suite décroissante $x_n \to 0$.
   - $\sigma(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - $\sigma(0) = \limsup \frac{x_n}{x_n - x_{n+1}}$

   $\Rightarrow$ fini pour des suites avec décroissance rapide comme $x_n = a^{-n}$ avec $a > 1$ mais infini pour des suites plus lentes comme $x_n = n^{-p}$ $(p > 0)$
3. $K = \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [x_n, x_n + r_n]$

Quelques cas concrets

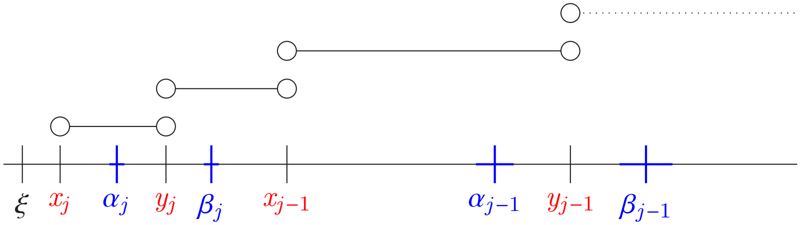
$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup \left\{ \frac{\sup\{|y-\xi| \,:\, y \in G\}}{\ell(G)} \;:\; G \text{ trou } \subseteq (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \right\}$$

1. L'ensemble de Cantor K vérifie $\sigma(\xi) = \infty$ pour tout $\xi \in K$ donc $C^1(K) \neq C^1(\mathbb{R}|K)$.
2. $K = \{0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ avec une suite décroissante $x_n \to 0$.
   - $\sigma(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - $\sigma(0) = \limsup \frac{x_n}{x_n - x_{n+1}}$

   $\Rightarrow$ fini pour des suites avec décroissance rapide comme $x_n = a^{-n}$ avec $a > 1$ mais infini pour des suites plus lentes comme $x_n = n^{-p}$ ($p > 0$)
3. $K = \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [x_n, x_n + r_n]$ Pour $r_n = e^{-2n}$ on a $\sigma(0) < \infty$, par exemple, pour $x_n = e^{-n}$ et $\sigma(0) = \infty$ pour $x_n = 1/n$

Idée de la démonstration

$$\sigma(\xi) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \left\{ \frac{\sup\{|y-\xi| \;:\; y \in G\}}{\ell(G)} \;:\; G \text{ trou } \subseteq (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \right\}$$



Pour en savoir plus :

Leonhard Frerick, Laurent Loosveldt and Jochen Wengenroth, *Continously differentiable functions on compact sets*, Results in Mathematics **75** n°4, 2020.

Pour en savoir plus :

Leonhard Frerick, Laurent Loosveldt and Jochen Wengenroth, *Continously differentiable functions on compact sets*, Results in Mathematics **75** n°4, 2020.

Disponible en ligne en open access