Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 34e année, nº 11-12, 1965, pp. 691-698

# SURFACES PROJECTIVEMENT CANONIQUES ET SURFACES DE GENRE GÉOMÉTRIQUE UN

par Lucien GODEAUX
*Membre de la Société*

L'objet de cette note a pour origine la propriété d'une surface de genres géométrique et arithmétique zéro, possédant un système bicanonique irréductible, d'être l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface possédant une seule courbe canonique [1]. Mais la construction d'une surface régulière possédant une seule courbe canonique de genre $\pi$ et par conséquent de genres $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = \pi$, semble assez difficile. Nous avons résolu la question dans les premiers cas : $\pi = 3$ [2] et $\pi = 4$ [3] mais dans le cas $\pi \geqslant 5$, nous avons été conduit à construire des cas particuliers en considérant les relations entre la surface cherchée et certaines surfaces connues [4]. La note actuelle rentre dans cette catégorie de recherches.

Nous considérons une surface régulière F projectivement canonique, c'est-à-dire dont le système canonique coïncide avec celui des sections hyperplanes. Nous supposons que cette surface contient une involution cyclique d'ordre premier impair $p$ ne possédant aucun point uni. De plus nous supposons en outre que l'homographie génératrice de l'involution possède un point uni isolé. Dans ces conditions, l'image $\Phi$ de l'involution est une surface régulière possédant une seule courbe canonique.

La surface $\Phi$ est particulière, car son système bicanonique contient des courbes décomposées en des couples de courbes génératrices de faisceaux. Sa construction donne cependant quelques indications présentant un certain intérêt sur le cas général.

1. Soit F une surface algébrique normale, régulière, projectivement canonique, c'est-à-dire dont le système $|C|$ des sections hyperplanes soit le système canonique. Soit $r$ la dimension de l'espace $S_r$ contenant la surface F.

Supposons que la surface F soit transformée en soi par une homographie H de période $p = 2\nu + 1$, premier impair, possédant comme axes ponctuels un point isolé O et $s$ espaces linéaires de dimensions au moins égales à un et au plus égales à $r - 3$, ne recontrant pas F. Sur F, H détermine une involution I d'ordre $p$ privée de points unis dont nous désignerons par $\Phi$ une image.

L'ordre $p^{(1)} - 1$ de la surface F doit être un multiple de $p$ et nous poserons $p^{(1)} = pn + 1$.

Désignons par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$ les axes ponctuels de H distincts de O, par $C_0$ la section de F par l'hyperplan contenant ces axes, par $C_i$ les courbes découpées par les hyperplans contenant 0 et les axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$ sauf $\sigma_i$, enfin par $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ les courbes qui correspondent sur $\Phi$ respectivement aux courbes $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_s$.

Nous avons démontré [5] que le système canonique de $\Phi$ est celui des systèmes $|\Gamma_\theta|, |\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_s|$ qui a la dimension minimum, c'est-à-dire actuellement $|\Gamma_\rho|$. La surface $\Phi$, régulière comme F, a donc les genres $p'_a = p'_g = 1$. De plus, les systèmes $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_s|$ doivent avoir la dimension $p'_a = 1$. Les axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$ de H sont donc des droites.

Si $p_a = r + 1$ est le genre arithmétique de F, entre ce genre et celui $p'_a = 1$ de $\Phi$ nous avons la relation

$$p_a + 1 = p(p'_a + 1),$$

d'où $r = 2p - 2$, $p_a = 2p - 1$.

La somme $s$ des dimensions des axes ponctuels de H est, d'après la théorie des homographies cycliques, égale à $r - p + 1 = p - 1$, donc on a $s = p - 1$.

Entre la courbe $C_0$ de genre $p^{(1)} = pn + 1$ et la courbe $\Gamma_0$ dont nous désignerons le genre par $\pi$ (genre linéaire de $\Phi$), nous avons une correspondance $(p, 1)$ privée de points unis, donc d'après la formule de Zeuthen, on

$$p(\pi - 1) = p^{(1)} - 1 = pn$$

d'où $n = \pi - 1$.

2. Attachons aux axes $0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ de l'homographie H les nombres $\varepsilon^0 = 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{\beta-1}$, où $\varepsilon$ est une racine primitive d'ordre $p$ de l'unité.

Le système bicanonique de $\Phi$ contient les courbes

$$2\Gamma_0, \Gamma_1 + \Gamma_{p-1}, \Gamma_2 + \Gamma_{p-2}, \ldots, \Gamma_\nu + \Gamma_{\nu+1}$$

et ce système a la dimension $P_2 - 1 = \pi$.

A côté du système bicanonique, on peut considérer les systèmes définis par les courbes $\Gamma_0 + \Gamma_1, \Gamma_\theta + \Gamma_2, \ldots, \left| \Gamma_0 + \Gamma_{p-1} \right|$. Le premier de ces systèmes par exemple contient les courbes

$$\Gamma_0 + \Gamma_1, \Gamma_2 + \Gamma_{\beta-1}, \ldots, \Gamma_\nu + \Gamma_{\nu+2}, 2\Gamma_{\nu+1}.$$

Ses courbes découpent sur la courbe $\Gamma_0$ une série paracanonique $g_{2\pi-2}^{\pi-2}$ et celles de ses courbes qui contiennent $\Gamma_0$ sont complétées par les courbes du faisceau $\left| \Gamma_1 \right|$. La dimension de ce système est donc aussi égale à $\pi$.

Les systèmes $\left| \Gamma_0 + \Gamma_2 \right|, \left| \Gamma_0 + \Gamma_3 \right|, \ldots, \left| \Gamma_0 + \Gamma_{p-1} \right|$ se comportent de la même manière et ont également la dimension $\pi$.

Nous avons donc sur la surface $\Phi$, $p$ systèmes linéaires que nous dénotons par

$$\left| 2\Gamma_0 \right|, \left| \Gamma_0 + \Gamma_1 \right|, \left| \Gamma_0 + \Gamma_2 \right|, \ldots, \left| \Gamma_0 + \Gamma_{p-1} \right|$$

qui ont les mêmes caractères (degré, genre et dimension) et dont le premier est le système bicanonique.

3. Désignons par $x_0, x_1, \ldots, x_{2p-2}$ les coordonnées des points de $S_r$ et par $O_i$ le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf $x_i$. Nous supposerons que le point O coïncide avec $O_0$ ; la droite $\sigma_1$ avec $O_1O_2$, la droite $\sigma_2$ avec $O_3O_4$, ..., la droite $\sigma_{p-1}$ avec $O_{2p-3}O_{2p-2}$.

L'homographie H transforme en lui-même le système des hyperquadriques de $S_r$. Il y a $p$ systèmes, que nous désignerons par $\left| Q_0 \right|, \left| Q_1 \right|, \ldots, \left| Q_{p-1} \right|$ dont chaque hyperquadrique est transformée en elle-même par H. Nous supposerons que lorsque l'on applique H, l'équation d'une hyperquadrique $Q_i$ se reproduit multipliée par $\varepsilon^i$.

L'équation d'une hyperquadrique $Q_0$ s'écrit

$$\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1 x_{2p-3} + \lambda_2 x_1 x_{2p-2} + \lambda_3 x_2 x_{2p-3} + \lambda_4 x_2 x_{2p-2} + \ldots 0$$

de sorte que le nombre des hyperquadriques de $\left| Q_0 \right|$ linéairement indépendantes est égal à $2p - 1$.

L'équation d'une hyperquadrique $Q_1$ contient les termes

$$x_0x_1, x_0x_2, x_3x_{2p-3}, x_3x_{2p-2}, x_4x_{2p-3}, x_4x_{2p-2}, \ldots, x_{2\nu+1}^2, x_{2\nu+1}, x_{2\nu+2}, x_{2\nu+2}^2$$

c'est-à-dire qu'il y a également $2p - 1$ hyperquadriques $Q_1$ linéairement indépendantes. On obtient des résultats analogues pour les autres systèmes d'hyperquadriques.

Les systèmes $|Q_0|, |Q_1|, \ldots, |Q_{p-1}|$ ont tous la dimension $2p-2$. Comme le système d'hyperquadriques de $S_r$ a la dimension $p(2p-1)-1$, d'après la théorie des homographies, on doit avoir

$$p(2p-2)+p=p(2p-1),$$

ce qui est une identité.

Aux systèmes $|2\Gamma_0|, |\Gamma_0+\Gamma_1|, \ldots, |\Gamma_0+\Gamma_{p-1}|$ de $\Phi$ correspondent sur F des courbes appartenant respectivement aux systèmes $|(F, Q_0)|, |(F, Q_1)|, \ldots, |(F, Q_{p-1})|$. On en conclut qu'il existe $2p-\pi-2$ hyperquadriques linéairement indépendantes de chacun des systèmes $|Q_0|, |Q_1|, \ldots, |Q_{p-1}|$ contenant la surface F.

4. On sait qu'entre le genre linéaire $p^{(1)}$ d'une surface et son genre géométrique $p_g$, on a, d'après Noether,

$$p^{(1)} \geqslant 2p_g-3$$

et, si le système canonique est simple, d'après Castelnuovo,

$$p^{(1)} \geqslant 3p_g-6.$$

La surface F est régulière, donc $p_g=p_a$ et les inégalités précédentes donnent

$$p(\pi-5)+6 \geqslant 0, \quad p(\pi-7)+10 \geqslant 0.$$

Ces inégalités exigent que l'on ait $\pi \geqslant 4$, $p$ ayant une valeur convenable pour $\pi \leqslant 7$.

Nous pouvons prendre pour modèle projectif de $\Phi$ une surface normale d'un espace $S_\pi$ à $\pi$ dimensions dont les sections hyperplanes sont les courbes bicanoniques et qui est d'ordre $4(\pi-1)$, ses sections hyperplanes ayant le genre $3(\pi-1)+1$.

Posons,

$$\begin{aligned} X_{00}=x_0^2,\ X_{2i-1,2p-2i-1}&=x_{2i-1}x_{2p-2i-1},\\ X_{2i-1,2p-2i}&=x_{2i-1}x_{2p-2i},\\ X_{2i,2p-2i-1}&=x_{2i}x_{2p-2i-1},\\ X_{2i,2p-2i}&=x_{2i}x_{2p-2i},\quad (i=1, 2, \ldots, \nu). \end{aligned}$$

et rapportons projectivement les hyperquadriques du système $|Q_0|$ aux hyperplans d'un espace $S_{2p-2}$ à $2p-2$ dimensions.

Aux $2p-\pi-2$ hyperquadriques linéairement indépendantes $Q_0$

contenant F correspondent des hyperplans de $S_{2p-2}$ ayant en commun l'espace $S_\pi$ de $\Phi$.

Nous avons d'autre part

$$X_{2i-1,2p-2i-1}\, X_{2i,2p-2i} = X_{2i-1,2p-2i}\, X_{2i,2p-2i-1},$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

c'est-à-dire $\nu$ hyperquadriques de $S_\pi$ contenant $\Phi$.

5. Sur le modèle projectif de la surface $\Phi$ dans $S_\pi$ les courbes $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p-1}$ ont l'ordre $2\pi - 2$. Une courbe $\Gamma_1$ et une courbe $\Gamma_{p-1}$ appartiennent à un hyperplan et $|\Gamma_{p-1}|$ étant un faisceau, une courbe $\Gamma_1$ appartient à un espace $S_{\pi-2}$ à $\pi - 2$ dimensions. Une courbe $\Gamma_1$ est donc une courbe paracanonique. Il en est de même des courbes $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_{p-1}$.

Une courbe $\Gamma_i$ et une courbe $\Gamma_{p-i}$ appartenant à un hyperplan, les espaces $S_{\pi-2}$ qui les contiennent ont en commun un espace $S_{\pi-3}$ à $\pi - 3$ dimensions.

Par contre, une courbe $\Gamma_i$ et une courbe $\Gamma_k$, où $k \neq p - i$, ne peuvent appartenir à un hyperplan et les espaces $S_{\pi-2}$ qui les contiennent ont en commun un espace à $\pi - 4$ dimensions. De même, les espaces $S_{\pi-2}$ de deux courbes $\Gamma_i$ ont en commun un espace à $\pi - 4$ dimensions.

Considérons par exemple deux courbes $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ et soient $\Gamma_{p-1}$, $\Gamma_{p-2}$ deux courbes déterminées. Les hyperplans passant par $\Gamma_{p-1}$ découpent sur $\Phi$ les courbes $\Gamma_1$ et ceux qui passent par $\Gamma_{p-2}$ les courbes $\Gamma_2$. Ces hyperplans forment deux faisceaux que nous pouvons représenter par

$$X_1 + \lambda X_2 = 0, \quad X_3 + \mu X_4 = 0.$$

Si nous établissons une homographie entre ces deux faisceaux, les intersections des hyperplans homologues engendrent une hyperquadrique

$$\lambda_1 X_1 X_3 + \lambda_2 X_1 X_4 + \lambda_3 X_2 X_3 + \lambda_4 X_2 X_4 = 0$$

qui est en général irréductible et ne contient pas la surface $\Phi$.

Cette hyperquadrique contient les courbes $\Gamma_{p-1}$, $\Gamma_{p-2}$. Elle coupe $\Phi$ suivant une courbe d'ordre $4\pi - 4$ formée des deux courbes précédentes et d'une courbe L. On a

$$4\Gamma_0 \equiv \Gamma_{p-1} + \Gamma_{p-2} + L.$$

Mais on a également

$$2\Gamma_0 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_{p-1}, \ 2\Gamma_0 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_{p-2},$$

donc

$$L \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

Ainsi quatre courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{p-1}, \Gamma_{p-2}$ se trouvent sur une hyperquadrique en général irréductible et ne contenant pas $\Phi$.

Plus généralement, quatre courbes $\Gamma_i, \Gamma_k, \Gamma_{p-i}, \Gamma_{p-k}$ appartiennent à une hyperquadrique en général irréductible ne contenant pas $\Phi$.

La question peut être présentée d'une manière un peu différente. Soient $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ deux hyperplans contenant $\Gamma_{p-1}$ et $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$ deux hyperplans contenant $\Gamma_{p-2}$. Les hyperquadriques dégénérées

$$\xi_1\xi_3 = 0, \ \xi_2\xi_4 = 0$$

déterminent un faisceau d'hyperquadriques en général irréductibles, dont une au plus peut contenir $\Phi$, qui contiennent les courbes $\Gamma_{p-1}$, $\Gamma_{p-2}$ et par suite deux courbes $\Gamma_1$, $\Gamma_2$.

6. On obtient un théorème analogue pour les courbes de deux faisceaux $|\Gamma_i|$ et $|\Gamma_{p-i}|$.

Soient $\Gamma_1, \overline{\Gamma}_1$ deux courbes du faisceau $|\Gamma_1|$ et $\Gamma_{p-1}, \overline{\Gamma}_{p-1}$ deux courbes du faisceau $|\Gamma_{p-1}|$. Désignons par $\xi_1 = 0$ l'équation de l'hyperplan contenant les courbes $\Gamma_1$, $\Gamma_{p-1}$, par $\xi_2 = 0$ celle de l'hyperplan contenant $\overline{\Gamma}_1$ et $\overline{\Gamma}_{p-1}$, par $\xi_3 = 0$ celle de l'hyperplan contenant $\Gamma_1$ et $\overline{\Gamma}_{-1}$ enfin par $\xi_4 = 0$ celle de l'hyperplan contenant les courbes $\overline{\Gamma}_1$ et $\Gamma_{p-1}$. Les hyperquadriques dégénérées

$$\xi_1\xi_3 = 0, \ \xi_2\xi_4 = 0$$

déterminent un faisceau d'hyperquadriques en général irréductibles dont une seule au plus peut contenir la surface $\Phi$. Ces hyperquadriques contiennent les courbes $\Gamma_1, \overline{\Gamma}_1, \Gamma_{p-1}, \overline{\Gamma}_{p-1}$.

Plus généralement, deux courbes du faisceau $|\Gamma_i|$ et deux courbes du faisceau $|\Gamma_{p-i}|$ appartiennent à une hyperquadrique irréductible.

7. Le système tricanonique de la surface $\Phi$ a le degré $9(\pi - 1)$,

le genre $6(\pi - 1) + 1$, et la dimension $P_3 - 1 = 3(\pi - 1) + 1$. Il contient les courbes

$$3\Gamma_0, \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_{p-1}, \Gamma_0 + \Gamma_2 + \Gamma_{p-2}, \ldots, \Gamma_0 + \Gamma_\nu + \Gamma_{\nu+1},$$

ainsi que les courbes

$$\Gamma_2 + 2\Gamma_{p-1}, \Gamma_3 + \Gamma_{p-2} + \Gamma_{p-1}, \ldots,$$
$$\Gamma_\nu + \Gamma_{\nu+2} + \Gamma_{p-1}, 2\Gamma_{\nu+1} + \Gamma_{p-1}, \ldots .$$

En particulier, il contient les courbes

$$2\Gamma_1 + \Gamma_{p-2}, 2\Gamma_2 + \Gamma_{p-1}, \ldots, 2\Gamma_{p-1} + \Gamma_2.$$

Ajoutons que d'après la théorie des involutions, on a

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 \equiv \ldots \equiv p\Gamma_{p-1}.$$

8. Revenons aux inégalités de Noether et Castelnuovo, qui nous donnent

$$p(\pi - 5) + 6 \geqslant 0, \quad p(\pi - 7) + 10 \geqslant 0.$$

Pour $\pi = 4$, nous devons avoir $p \leqslant 6$, $3p \leqslant 10$, d'où $p = 3$. La surface F est la surface projectivement canonique de $S_4$, intersection de deux variétés cubiques. C'est le cas que nous avons étudié antérieurement [6].

Pour $\pi = 5$, nous devons avoir $2p \leqslant 10$ ; d'où $p = 3$ ou $p = 5$.

Dans le cas $p = 3$, la surface F appartiendrait à un espace $S_4$ et serait d'ordre 12. Ce cas ne peut se présenter.

Dans le cas $p = 5$, la surface F appartiendrait à un espace $S_8$ et serait d'ordre 20. A priori, ce cas peut se présenter.

Pour $\pi = 6$, on doit avoir $p \leqslant 10$, d'où $p = 3$, ou $p = 5$ ou $p = 7$. Le cas $p = 3$ est à exclure. Dans le cas $p = 5$, la surface F serait d'ordre 25 et appartiendrait à un espace $S_0$.

Si $p = 7$, la surface appartient à un espace $S_{12}$ et doit être d'ordre 35.

Pour appliquer le procédé exposé ici, il importe donc de déterminer les surfaces projectivement canoniques de $S_8$ et de $S_{12}$, car les équations de la surface $\Phi$ s'obtiennent évidemment en partant de celles de F.

Liège, le 2 décembre 1965.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] *Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1965, pp. 25-41). Dans ce mémoire se trouvent exposées des recherches que nous avons communiquées à l'Académie royale de Belgique depuis 1959.

[2] *Construction de la surface bicanonique possédant une seule courbe canonique de gente trois* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1962, pp. 646-651).

[3] *Construction d'une surface possédant une seule courbe canonique de genre quatre* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1965, pp. 956-963, 1104-1110).

[4] *Construction d'une surface algébrique possédant une seule courbe canonique de genre cinq* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1959, pp. 441-446 ; 1964, pp. 785-791 ; 1965, pp. 964-669) et d'autres notes en cours de publication dans le même Bulletin.

[5] *Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis appartenant à une surface régulière* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1932, pp. 672-79). Voir aussi notre ouvrage : *Théorie des involutions cycliques appatenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Éd. Cremonese, 1963).

[6] *Construction... loc. cit.* [2]