Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 35e année, n° 5-6, 1966, pp. 323-326

SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES POSSÉDANT UNE INVOLUTION DU SECOND ORDRE PRIVÉE DE POINTS UNIS

par Lucien GODEAUX,
Membre de la Société

Dans différentes recherches nous avons eu à considérer une courbe canonique transformée en elle-même par une homographie biaxiale harmonique dont les axes ne rencontrent pas la courbe. Celle-ci contient donc une involution γ_2 du second ordre, privée de points unis.

Nous considérons la surface lieu des cordes de la courbe joignant les points des groupes de γ_2. Nous considérons également les hyperquadriques passant par cette surface en distingant les hyperquadriques contenant les axes de l'homographie et celles qui ne contiennent pas ces axes.

1. Soit C une courbe algébrique non hyperelliptique de genre $\rho > 2$ contenant une involution γ_2 d'ordre deux, privée de points unis. Les groupes de γ_2 sont représentés par une courbe C' dont le genre π est donné par $\rho = 2\pi - 1$.

Prenons pour modèle projectif de C une courbe canonique d'ordre $2\rho - 2$ d'un espace $S_{\rho-1}$. L'involution γ_2 est déterminée sur C par une homographie biaxiale harmonique H. Dans la série canonique $g_{2\rho-2}^{\rho-1}$ de C se trouvent deux séries linéaires partielles composées au moyen de γ_2. L'une est la transformée de la série canonique $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ de C' ; l'autre est la transformée d'une série paracanonique $g_{2\pi-2}^{\pi-2}$ de C'. Il en résulte que les axes ponctuels de l'homographie H sont deux espaces $\sigma_{\pi-2}$, $\sigma_{\pi-1}$ de dimensions respectives $\pi - 2$, $\pi - 1$.

Manuscrit reçu le 26 mai 1966.

Les hyperquadriques linéairement indépendantes de $S_{\rho-1}$ sont au nombre de

$$\frac{1}{2}\rho(\rho+1) = \pi(2\pi-1)$$

et parmi celles-ci, il en est

$$\frac{1}{2}(\rho-2)(\rho-3) = (\pi-2)(2\pi-3)$$

qui contiennent C.

2. Désignons par $y_0, y_1, \ldots, y_{\pi-2}$ les coordonnées des points de $\sigma_{\pi-2}$ et par $z_0, z_1, \ldots, z_{\pi-1}$ celles des points de $\sigma_{\pi-1}$. Supposons que les équations de H soient

$$\lambda y'_i = y_i, \qquad \lambda z'_i = -z_i.$$

Les hyperquadriques de $S_{\rho-1}$ transformées en elles-mêmes par H forment deux systèmes linéaires. Les hyperquadriques du premier système sont celles dont l'équation se reproduit multipliée par $+1$ lorsque l'on effectue H. Les hyperquadriques du second système sont celles dont l'équation se reproduit multipliée par -1. Nous désignerons les premières par V et les secondes par $\overline{\mathrm{V}}$.

Les hyperquadriques V linéairement indépendantes sont au nombre de π^2 et les hyperquadriques $\overline{\mathrm{V}}$ au nombre de $\pi(\pi-1)$.

Nous nous proposons de déterminer les hyperquadriques V et $\overline{\mathrm{V}}$ passant par la courbe C.

Supposons que parmi les hyperquadriques de $S_{\rho-1}$ ne passant pas par C, il y en ait x_1 linéairement indépendantes qui soient des V et x_2 qui soient des $\overline{\mathrm{V}}$. On a

$$x_1 + x_2 = \pi(2\pi-1) - (\pi-2)(2\pi-3) = 6\pi - 6.$$

Les x_1 hyperquadriques V ne passant pas par C déterminent sur cette courbe une série linéaire complète d'ordre $4(\rho-1) = 8(\pi-1)$ et de dimensions $x_1 - 1$, composée au moyen de γ_2 et à laquelle correspond sur C′ une série d'ordre $4(\pi-1)$ et de dimension $3\pi-4$. On a donc $x_1 = 3(\pi-1)$ et de même $x_2 = 3(\pi-1)$.

Cela étant, les hyperquadriques V linéairement indépendantes passant par C sont au nombre de $\pi^2 - 3(\pi-1)$ et les hyperquadriques $\overline{\mathrm{V}}$ au nombre de $(\pi-1)(\pi-3)$.

3. A la courbe C associons la surface F lieu des droites joignant les points des couples de γ_2.

Les hyperplans d'un faisceau déterminent sur C une série d'ordre $2(\rho - 1)$ et de dimension un. D'après la formule de Schubert, il y a $2(\rho - 1)$ couples de γ_2 appartenant à des groupes de la première série, donc la surface F est d'ordre $2(\rho - 1) = 4(\pi - 1)$.

Soit ξ un hyperplan passant par $\sigma_{\pi-1}$. Par un point de F appartenant à ξ, passe une génératrice de cette surface, unie pour H donc se trouvant dans ξ. Il en résulte que l'hyperplan ξ contient $2(\pi - 1)$ génératrices de F et que cette surface rencontre l'espace $\sigma_{\pi-1}$ suivant une courbe C'_1 d'ordre $2(\pi - 1)$. La surface F étant une réglée de genre π, C'_1 est de genre π. Elle ne peut être située dans un hyperplan de $\sigma_{\pi-1}$ et c'est par conséquent une courbe canonique de genre π.

De même, si ξ est un hyperplan passant par $\sigma_{\pi-2}$, cet hyperplan contient $2(\pi - 1)$ génératrices de F et cette surface rencontre $\sigma_{\pi-2}$ suivant une courbe C'_2 d'ordre $2(\pi - 1)$. C'est une courbe paracanonique.

Observons que si $\pi = 3$, la courbe C'_2 se réduit à une droite quadruple.

Une section hyperplane de F est une courbe de genre π. Les hyperplans passant par $\sigma_{\pi-1}$ découpent sur F des groupes de $2(\pi - 1)$ droites qui donnent sur une section hyperplane, une série paracanonique. Les hyperplans passant par $\sigma_{\pi-2}$ découpent sur F des groupes de $2(\pi - 1)$ génératrices qui donnent sur une section hyperplane la série canonique.

4. Les hyperquadriques $\overline{V}$ sont formées de droites s'appuyant sur $\sigma_{\pi-1}$ et $\sigma_{\pi-2}$, axes de l'homographie H. Par conséquent, elles contiennent la surface F.

Une hyperquadrique V coupe la surface F suivant la courbe C et suivant une courbe d'ordre $4(\pi - 1)$ nécessairement formée de $4(\pi - 1)$ génératrices de F. Celle-ci étant une réglée de genre π, ces groupes de $4(\pi - 1)$ génératrices forment sur F une série linéaire ayant la dimension $3\pi - 4$ (si $\pi > 4$). On en conclut que la surface F appartient à $\pi^2 - 6(\pi - 1)$ hyperquadriques V linéairement indépendantes.

Les hyperquadriques V contenant F contiennent la courbe C'_1. Observons que parmi les hyperquadriques V se trouvent les cônes quadratiques de sommet $\sigma_{\pi-1}$ et précisément les cônes projetant de $\sigma_{\pi-2}$ les hyperquadriques de $\sigma_{\pi-2}$ contenant C'_2, contiennent F. La courbe C'_2 de $\sigma_{\pi-2}$ étant une courbe paracanonique appartient à

$\frac{1}{2}(\pi - 1)(\pi - 6)$ hyperquadriques linéairement indépendantes et il y a autant de cônes projetant F de $\sigma_{\pi-1}$. La courbe canonique C_1' appartient à $\frac{1}{2}(\pi - 2)(\pi - 3)$ hyperquadriques de $\sigma_{\pi-1}$ linéairement indépendantes et on doit avoir

$$\pi^2 - 6\pi + 6 = \frac{1}{2}(\pi - 1)(\pi - 6) + \frac{1}{2}(\pi - 2)(\pi - 3),$$

ce qui est une identité.

De même, F appartient à $\frac{1}{2}(\pi - 2)(\pi - 3)$ cônes de sommet $\sigma_{\pi-1}$.

On en conclut que *parmi les hyperquadriques linéairement indépendantes contenant* F, *il y a* $(\pi - 1)(\pi - 3)$ *hyperquadriques contenant les axes de l'homographie,* $\frac{1}{2}(\pi - 1)(\pi - 6)$ *cônes de sommet* $\sigma_{\pi-1}$ *et* $\frac{1}{2}(\pi - 2)(\pi - 3)$ *cônes de sommet* $\sigma_{\pi-2}$.

Liège, le 13 mai 1966.