Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 34e année, n° 11-12, 1965, pp. 687-690

PROPRIÉTÉS DES VARIÉTÉS DE SEGRE REPRÉSENTANT LES COUPLES DE POINTS DE DEUX PLANS OU DE DEUX ESPACES A TROIS DIMENSIONS

par Lucien GODEAUX
Membre de la Société

A maintes reprises, F. Enriques a appelé l'attention sur l'intérêt de la construction de surfaces dont le système canonique coïncide avec celui de ses sections hyperplanes, surfaces que nous appelons projectivement canoniques pour les distinguer des surfaces canoniques des variétés à trois dimensions. Cette note est consacrée à la construction de deux surfaces projectivement canoniques appartenant l'une à la variété de Segre représentant les points de deux plans, l'autre à la variété de Segre représentant les points de deux espaces à trois dimensions.

Sur chacune de ces variétés, nous commençons par construire une surface régulière à courbe canonique d'ordre zéro, de genres $p_a = P_4 = 1$, puis une variété à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de cette nature. L'intersection de cette variété et d'une hyperquadrique est une surface projectivement canonique d'après une remarque faite par Enriques dans ses *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, rédigées par L. Campedelli (Padova, Cedam, 1932, p. 233).

Nous obtenons les théorèmes suivants :

L'intersection d'une variété de Segre V_4^6 *de* S_8 *représentant les couples de points de deux plans par un hyperplan et une hyperquadrique est une surface de genres* $p_a = P_4 = 1$.

L'intersection de la variété de Segre V_4^6 *de* S_8 *par deux hyperquadriques est une surface projectivement canonique de genres*

$$p_a = p_g = 9, \; p^{(1)} = 25.$$

Manuscrit reçu, le 18 novembre 1965.

L'intersection de la variété de Segre V_6^{20} de S_{15} représentant les couples de points de deux espaces à trois dimensions par un espace à 11 dimensions, est une surface de genres $p_a = P_4 = 1$.

L'intersection de la variété de Segre V_6^{20} de S_{15} par un espace linéaire à 12 dimensions et par une hyperquadrique est une surface projectivement canonique de genres

$$p_a = p_g = 13, \ p^{(1)} = 41.$$

1. Soient $\eta(y_1, y_2, y_3)$ et $\zeta(z_1, z_2, z_3)$ deux plans. Posons $X_{ik} = y_i z_k$. Les équations de la variété de Segre V_4^6 représentant les couples de points des plans s'obtient en écrivant que le déterminant

$$|X_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

est de caractéristique un. Cette variété, d'ordre six, est plongée dans un espace S_8 à huit dimensions.

A une section hyperspatiale de V_4^6 correspond une réciprocité entre les plans η et ζ. La section de la variété V_4^6 par un espace S_5 est une courbe C. Aux trois hyperplans de S_8 qui déterminent cet espace S_5 correspondent trois réciprocités entre les plans η, ζ et les points conjugués par rapport à ces trois réciprocités décrivent dans chaque plan des cubiques elliptiques, en correspondance birationnelles entre elles et avec C, qui est donc elliptique.

La section de la variété V_4^6 par un espace à cinq dimensions est une courbe elliptique d'ordre six donc normale.

Coupons maintenant V_4^6 par un espace S_6 à six dimensions. Nous obtenons une surface F à sections hyperplanes elliptiques, donc rationnelle.

Les hyperquadriques de S_6 coupent F suivant des courbes d'ordre 12, de genre 7. Les sections hyperplanes d'une telle courbe forment son système canonique.

Coupons V_4^6 par un hyperplan S_7 et considérons la surface F_0 découpée par une hyperquadrique de S_7 sur la section V_3^6. Les sections hyperplanes de la surface F_0 sont leurs propres adjointes et par conséquent la surface régulière F_0 possède une courbe canonique d'ordre zéro. Elle a les genres $p_a = P_4 = 1$.

2. Soit F_1 la section de la variété V_4^6 par deux hyperquadriques f_1, f_2. Considérons une section hyperplane C_1 de F. L'hyperplan coupe la section de V_3^6 par l'hyperquadrique f_1 suivant une surface

F_0 de genres $p_a = P_4 = 1$ et les hyperquadriques découpent sur cette surface un système linéaire qui est son propre adjoint. Ce système a le genre 25.

Il en résulte que sur la surface F_1, les adjointes à une section hyperplane sont découpées par les hyperquadriques, c'est-à-dire par les courbes $2C_1$. On a donc

$$|C_1'| = |2C_1|, \quad |C_1' - C_1| = |C_1|.$$

Les sections hyperplanes de F_1 sont donc les courbes canoniques de la surface. Celle-ci a les genres

$$p_a = p_g = 9, \quad p^{(1)} = 25.$$

3. Soient $\eta(y_1, y_2, y_3, y_4)$ et $\zeta(z_1, z_2, z_3, z_4)$ deux espaces à trois dimensions. En posant $X_{ik} = y_i z_k$, on obtient les équations de la variété de Segre V_6^{20} en écrivant que le déterminant

$$|X_{ik}|, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

est de caractéristique un. La variété est d'ordre 20 et est plongée dans un espace S_{15} à quinze dimensions.

A une section hyperplane de V_6^{20} correspond une réciprocité entre les espaces η, ζ. Si nous considérons quatre réciprocités entre ces espaces,

$$\varphi_1(y, z) = 0, \quad \varphi_2(y, z) = 0, \quad \varphi_3(y, z) = 0, \quad \varphi_4(x, y) = 0$$

où les φ sont des formes bilinéaires en y et z, l'élimination des z entre ces équations donne dans η une surface du quatrième ordre F_η et l'élimination des y donne dans ζ une surface du quatrième ordre F_ξ. Ces surfaces sont de genres $p_a = P_4 = 1$. Aux quatre réciprocités correspondent quatre hyperplans de S_{15} qui ont en commun un espace S_{11} à onze dimensions coupant V_6^{20} suivant une surface F. Il y a une correspondance birationnelle entre les trois surfaces F, F_η, F_ξ par conséquent la surface F est de genres

$$p_a = P_4 = 1.$$

A une section hyperplane de F correspond une cinquième réciprocité entre les espaces η et ζ. Les points conjugués dans les cinq réciprocités décrivent des courbes d'ordre 10 et de genre 11. Par conséquent, les sections hyperplanes de la surface F sont des courbes de genre 11. La surface est d'ailleurs d'ordre 20, elle est donc normale.

4. Un espace S_{12} coupe la variété V_6^{20} suivant une variété V_3^{20} dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres

$$p_a = P_4 = 1.$$

Désignons par F_0 la section de la variété V_3^{20} par une hyperquadrique V_{11}^2 de S_{12}. Cette surface est d'ordre 40.

Un hyperplan de S_{12} découpe sur la surface F une courbe C_0 intersection de la surface F appartenant à cet hyperplan et de V_{11}^2. La courbe C_0 est donc de genre 41.

Les hyperquadriques de S_{12} découpent sur la surface F un système linéaire qui est son propre adjoint, donc ces hyperquadriques découpent sur la courbe C_0 la série canonique de celle-ci. Il en résulte que sur la surface F_0, l'adjoint au système des sections hyperplanes $|C_0|$ est le système $|2C_0|$. On a donc

$$|C_0'| = |2C_0|, \quad |C_0' - C_0| = |C_0|.$$

Le système canonique de F coïncide donc avec le système de ses sections hyperplanes et cette surface est donc projectivement canonique. Elle a les genres

$$p_a = p_g = 13, \quad p^{(1)} = 41.$$

5. Si l'on se donne les trois hyperplans de S_{15} déterminant l'espace S_{12}, cela permet d'exprimer linéairement trois des quantités X_{ik} en fonction des 13 autres, que nous désignerons par $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{11}$. Nous poserons

$$X_{ik} = \varphi_{ik}(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{13})$$

les φ_{ik} étant linéaires.

Les équations de la surface F_0 s'obtiendront alors en adjoignant à celles que l'on obtient en exprimant que le déterminant

$$|\varphi_{ik}|, \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

est de caractéristique un l'équation d'une hyperquadrique

$$\varphi_2(x_0, x_1, \ldots, x_{19}) = 0.$$

Liège, le 15 novembre 1965.