Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 34e année, nº 9-10, 1965, pp. 545-549

RELATION ENTRE LES SURFACES PROJECTIVEMENT CANONIQUES ET LES SURFACES AYANT UNE COURBE CANONIQUE D'ORDRE ZÉRO

(seconde note)

par Lucien GODEAUX
Membre de la Société

Dans la première note (*), nous avons établi une liaison entre une surface projectivement canonique, c'est-à-dire dont les sections hyperplanes forment le système canonique, et les surfaces, régulières ou non, possédant une courbe canonique d'ordre zéro. Nous revenons ici sur cette question pour donner une nouvelle forme à notre résultat, mais en nous limitant au cas où la surface possédant une courbe canonique d'ordre zéro est régulière ($p_a = P_4 = 1$). Nous établissons le théorème suivant :

Une surface double F *ayant comme support une surface normale* Φ *de genres* $p_a = P_4 = 1$ *et comme courbe de diramation la section de cette surface par une hyperquadrique, est une surface projectivement canonique.*

Si la surface Φ est normale dans un espace à π dimensions, la surface F est normale dans un espace à $\pi + 1$ dimensions.

Nous terminons en considérant un cas qui échappe à nos considérations comme nous l'avons indiqué dans notre première note. Nous avions alors supposé que la surface F était transformée en soi par une homologie harmonique dont le centre n'appartenait pas à la surface. Dans le cas considéré, il en est autrement. Le théorème est encore exact, mais la démonstration est différente.

1. Soit F une surface d'ordre n d'un espace S_r à r dimensions ($r \geqslant 4$) dont les sections hyperplanes C forment le système canonique complet. Supposons qu'elle soit transformée en soi par une

(*) La première note est parue dans ce *Bulletin*, 1965, pp. 539-544

Manuscrit reçu le 21 octobre 1965.

homologie harmonique H dont le centre n'appartient pas à la surface, son hyperplan coupant celle-ci suivant une courbe D de $|C|$.

L'homogie H détermine sur F une involution I du second ordre dont une image Φ est une surface à courbe canonique d'ordre zéro.

Le modèle projectif de Φ que nous avons construit dans notre première note s'obtient de la manière suivante : On considère dans un espace S_R à $R = \frac{1}{2} r(r+1)$ dimensions un cône dont les sections hyperplanes sont des variétés de Veronese Ω_{r-1}. La surface Φ est tracée sur ce cône et ses équations s'obtiennent en introduisant, dans les équations de F, les coordonnées $X_{ik} = x_i x_k$ de S_R.

Nous allons construire un autre modèle projectif de la surface Φ en supposant que celle-ci est *régulière* et a donc les genres $p_a = P_4 = 1$.

2. Désignons par C_1 les sections de F par les hyperplans passant par le centre de l'homologie H. Le système $|C_1|$ appartient à l'involution I et si l'on rapporte projectivement ses courbes aux hyperplans d'un espace S_{r-1} à $r-1$ dimensions, on obtient une surface Φ_0 image de l'involution I.

Désignons par Γ les sections hyperplanes de Φ_0 et par π leur genre. La surface Φ étant de genres $p_a = P_4 = 1$, est normale, est d'ordre $2\pi - 2$ et appartient à un espace S_π à π dimensions. On a donc pour la surface F,

$$n = 4\pi - 4, \; r = \pi + 1, \; p^{(1)} = 4\pi - 3.$$

A une courbe C de $|C|$ n'appartenant pas à $|C_1|$, correspond sur Φ_0 une courbe Γ et à cette courbe correspondent sur F la courbe C envisagée et sa transformée par H. Lorsque la courbe C varie d'une manière continue dans $|C|$ et tend vers une courbe C_1, la courbe Γ tend vers une courbe 2Γ. Il en résulte que la courbe Γ est la section de la surface Φ_0 par une hyperquadrique. On en conclut en particulier que la courbe D_0 qui correspond à D est la section de Φ_0 par une hyperquadrique.

La courbe de diramation D_0 pour la correspondance (1, 2) entre Φ_0 et F a le genre $4\pi - 3$ et l'ordre $4\pi - 4$.

Considérons le système bicanonique $|2C|$ de F. Il est transformé en soi par H et contient deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I. L'un contient les courbes $2C_1$ et l'autre les courbes $D + C_1 \equiv C$. Aux courbes de ces deux systèmes correspondent sur Φ_0 respectivement les courbes du système $|2\Gamma|$ distinctes de D et les courbes du système $|D_0 + \Gamma|$. Le premier système a la dimension $4\pi - 4$ et le second la dimension $\pi + 1$. Il en résulte que le système bicanonique de F a la dimension

$$P_2 - 1 = 5\pi - 2.$$

D'autre part, si p_a est le genre arithmétique de F, on a

$$P_2 = p_a + p^{(1)} = p_a + 4\pi - 3,$$

d'où $p_a = \pi + 2$.

Le système canonique de F étant celui de ses sections hyperpales, on a $p_g = r + 1 = \pi + 2$. La surface F est donc régulière

$$(p_a = p_g = \pi + 2).$$

On en conclut que la surface F appartient à $\frac{1}{2}(\pi^2 - 5\pi + 8)$ hyperquadriques linéairement indépendantes.

3. Nous allons maintenant nous poser lé problème inverse. Considérons une surface Φ_0 de genres $p_a = P_4 = 1$, appartenant à un espace S_π à π dimensions ($\pi \geqslant 3$). Elle est d'ordre $2\pi - 2$ et ses sections hyperplanes Γ ont le genre π. Soit D_0 la section de Φ_0 par une hyperquadrique. C'est une courbe de genre $4\pi - 3$.

Considérons la surface double F ayant comme support Φ_0 et comme courbe de diramation D_0.

La courbe canonique de Φ_0 étant d'ordre zéro, il lui correspond sur F une courbe d'ordre zéro et par suite, d'après un théorème d'Enriques, la courbe D correspondant sur F à D_0 est une courbe canonique de cette surface.

Désignons par C_1 les courbes qui correspondent sur F aux sections hyperplanes Γ de Φ_0. Celles-ci coupant D_0 en $4\pi - 4$ points, les courbes C_1 sont de genre $4\pi - 3$.

Les courbes 2Γ distinctes de D_0 forment un système linéaire de dimension $4\pi - 4$. Il leur correspond sur F des courbes du système $|2C_1|$ coupant les courbes C_1 en $8\pi - 8$ points. La série de ces groupes de points ayant la dimension $4\pi - 4$, c'est nécessairement la série canonique et $|2C_1|$ est l'adjoint à $|C_1|$. On en conclut que les courbes C_1 sont des courbes canoniques de F. Ces courbes et D appartiennent donc au même système (canonique) $|C|$, de dimension au moins égale à $\pi + 1$.

4. Le système $|C|$ n'appartient pas à l'involution I, soit $r \geqslant \pi + 1$ sa dimension. En rapportant projectivement les courbes C aux hyperplan d'un espace S_r à r dimensions, on obtient un modèle projectif de F que nous continuerons à désigner par F.

Sur cette surface F, l'involution I est engendrée par une transformation birationnelle involutive T. Le système canonique $|C|$ est transformé en soi par T, donc T fait se correspondre les hyperplans et est une homographie harmonique H. Les hyperplans découpant sur F les courbes C_1 ont en commun un espace $S_{r-\pi-1}$ qui est un axe ponctuel de H. L'autre axe ponctuel a la dimension π. Il doit contenir la section hyperplane D de F, donc il coïncide avec cet hyperplan et le premier axe est un point. On a $r = \pi + 1$ et H est une homologie harmonique. Le genre géométrique de F est donc $p_g = \pi + 2$.

L'adjoint $|2C|$ à $|C|$ découpe sur une courbe C la série canonique complète, donc d'après un théorème de Picard, la surface F est régulière et on a $p_a = \pi + 2$.

5. Nous montrerons maintenant le passage de la surface Φ_0 à la surface Φ de notre première note.

Rappelons que la surface Φ est située dans un espace à

$$R = \frac{1}{2} r(r+1) = \frac{1}{2} (\pi + 1)(\pi + 2)$$

dimensions dont les sections hyperplanes sont des variétés Ω_π de Veronese.

Rapportons projectivement les hyperquadriques de S_π aux hyperplans d'un espace à $\frac{1}{2} \pi(\pi + 3)$ dimensions. Nous obtenons une variété de Veronese Ω_π sur laquelle il correspond à la surface Φ_0 une surface Φ.

Plaçons cette variété Ω_π dans un espace linéaire à $R = \frac{1}{2}(\pi + 1)(\pi + 2)$ dimensions et considérons le cône projetant Ω_π d'un point O de cette espace. La surface Φ appartient à ce cône et coïncide avec la surface Φ de notre première note.

Observons que dans S_π la surface Φ_0 appartient à $\frac{1}{2}(\pi^2 - 5\pi + 6)$ hyperquadriques linéairement indépendantes. La surface Φ appartient à autant d'hyperplans de S_R.

6. Nous avons exclu de nos considérations les surfaces F passant par le centre de l'homologie H. La raison en est que le domaine de ce point sur la surface est équivalent à une courbe rationnelle de diramation, qu'il faut ajouter à la courbe D.

La surface de S_4 intersection de deux hypersurfaces d'ordre trois est projectivement canonique. Une surface F de ce type invariant pour une homologie H a pour équations

$$x_0^2 f_1 + f_3 = 0, \; x_0^2 f_1' + f_3' = 0,$$

où les f et f' sont des formes en x_1, x_2, x_3, x_4 dont le degré est indiqué par l'indice. L'homologie harmonique H de centre O_0 et d'hyperplan $x_0 = 0$ engendre sur F une involution I. Pour obtenir un modèle projectif d'une image Φ de cette involution, projetons la surface F du point O_0 sur l'hyperplan $x_0 = 0$. On obtient la surface du quatrième ordre

$$f_1 f_3' - f_1' f_3 = 0,$$

qui est bien de genres $p_a = P_4 = 1$.

La courbe de diramation se compose d'une droite $f_1 = f_1' = 0$ qui correspond au domaine du point O_0 sur F et d'une courbe du neuvième ordre $f_3 = f_3' = 0$ qui correspond à la courbe unie de I.

Inversement, on pourrait passer de la surface Φ à la surface F.

Le théorème obtenu dans notre première note est donc applicable dans le cas qui vient d'être envisagé.

Liège, le 28 septembre 1965.