Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 35e année, no 11-12, 1966, pp. 657-663

PROPRIÉTÉS DES VARIÉTÉS DE SEGRE REPRÉSENTANT LES COUPLES DE POINTS DE DEUX PLANS OU DE DEUX ESPACES A TROIS DIMENSIONS
(seconde note)

par Lucien GODEAUX
Membre de la Société

Dans un travail publié l'an dernier sous le même titre (*), nous avons établi les résultats suivants :

La section par un espace à 12 dimensions de la variété de Segre représentant dans un espace à quinze dimensions les couples de points de deux espaces à trois dimensions est une variété dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres $p_a = P_4 = 1$ (régulières et dont la courbe canonique est d'ordre zéro).

La section de la variété précédente par une hyperquadrique est une surface projectivement canonique, c'est-à-dire une surface dont les sections hyperplanes forment le système canonique.

Nous commencerons par donner ici une nouvelle démonstration de ces propriétés, montrant leurs relations avec des questions connexes.

Nous considérons ensuite une homographie biaxiale harmonique transformant en elles-mêmes la variété de Segre et la variété à trois dimensions section de la première par un espace à 12 dimensions. Nous montrons que sur cette variété, l'homographie engendre une involution ayant pour image dans un espace à six dimensions, une variété dont les sections hyperplanes sont des surfaces possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro ($p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$). Nous considérons également l'image de l'involution engendrée par l'homographie sur la surface projectivement canonique dont il est question plus haut.

Manuscrit reçu le 15 décembre 1966.

(*) Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 1965, pp. 687-690.

1. Soient (y), (z) deux espaces à trois dimensions superposés ou non, y_1, y_2, y_3, y_4 les coordonnées des points du premier, z_1, z_2, z_3, z_4 celles des points du second. Posons

$$X_{ik} = y_i z_k. \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Les équations de la variété V_6^{20} de Segre représentant dans un espace linéaire S_{15} à 15 dimensions les couples de points des espaces (y), (z) s'obtiennent en écrivant que le déterminant

$$| X_{ik} | \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

est de caractéristique un, c'est-à-dire que tous les déterminants à quatre éléments obtenus en supprimant deux lignes et deux colonnes sont nuls. Ces déterminants sont au nombre de 36 et chacun d'eux égale à zéro représente une hyperquadrique. La variété V_6^{20} appartient donc à 36 hyperquadriques linéairement indépendantes.

A un hyperplan de l'espace S_{15} correspond une réciprocité entre les espaces (y), (z), donc l'intersection de la variété V_6^{20} avec un espace linéaire S_{12} à 12 dimensions représente les couples de points y, z qui se correspondent dans trois réciprocités. En d'autres termes, ces points y, z sont homologues dans une transformation birationnelle T qui fait correspondre aux plans de l'espace (z) les surfaces cubiques de l'espace (y) passant par une courbe Γ d'ordre six et de genre trois, et inversement.

Si l'on applique à cette transformation birationnelle les méthodes de représentation des transformations birationnelles que nous avons exposées autrefois (*), on voit que les sections hyperplanes de la variété V_3^{20} de S_{12} correspondent aux surfaces du quatrième ordre passant par la courbe Γ. Ces surfaces du quatrième ordre ont les genres $(p_a = P_4 = 1)$, donc

La section de ta variété de Segre V_6^{20} *par un espace linéaire à* 12 *dimensions est une variété* V_3^{20} *à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces régulières ayant une courbe canonique d'ordre zéro* $(p_a = P_4 = 1)$.

Ou encore : *Les sections de la variété de Segre* V_6^{20} *par un espace linéaire à* 11 *dimensions est une surface régulière dont la courbe canonique est d'ordre zéro.*

(*) L. Godeaux, *Une représentation des transformations birationnelles du plan et de l'espace* (Mémoires in-8° de l'Académie Royale de Belgique, 1949), *Sopra una rappresentazione delle trasformazioni cremoniane fra due piani e fra due spazi* (Conferenze del Seminario di Matematica dell' Università di Bari, 1961).

La section de la variété V_3^{20} *de* S_{12} *par une hyperquadrique est une surface projectivement canonique de genres* $p_a = p_g = 13$, $p^{(1)} = 41$. *Elle appartient à* 37 *hyperquadriques linéairement indépendantes.*

A cette surface correspond dans l'espace (y) une surface du huitième ordre passant doublement par la courbe Γ et dont les adjointes sont les surfaces du quatrième ordre passant par Γ.

2. Considérons une homographie entre les espaces (y) et (z). On peut disposer des figures de référence pour que cette homographie ait pour équations

$$y_i = z_i, \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Dans l'espace S_{15}, cette homographie donne l'homographie harmonique H,

$$\rho X'_{ik} = X_{ki}, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Si l'on applique cette homographie au déterminant $|X_{ik}|$, on obtient son transposé, donc la variété de Segre V_6^{20} est transformée en elle-même par H et celle-ci détermine sur la variété une involution I du second ordre.

Les axes ponctuels de l'homographie H sont :

Une espace σ_5 à cinq dimensions d'équations

$$X_{ik} + X_{ki} = 0.$$

Un espace σ_9 à neuf dimensions d'équations

$$X_{ik} - X_{ki} = 0.$$

La variété V_6^{20} ne rencontre pas l'espace σ_5 mais elle rencontre l'espace σ_9 suivant la variété de Veronese Ω_3^8

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{12} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{13} & X_{23} & X_{33} & X_{34} \\ X_{14} & X_{24} & X_{34} & X_{44} \end{vmatrix} \quad \text{(caractéristique un)}$$

représentant les quadriques d'un espace linéaire à trois dimensions.

3. Pour obtenir une image de l'involution I, rapportons projectivement les hyperplans passant par σ_5 aux hyperplans d'un espace S_9 à neuf dimensions. Dans ce but, posons

$$Y_{ik} = X_{ik} + X_{ki}, \qquad (l, k = 1, 2, 3, 4).$$

Un calcul simple montre que le déterminant symétrique

$$\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{12} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{13} & Y_{23} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{14} & Y_{24} & Y_{34} & Y_{44} \end{vmatrix}$$

a la caractéristique deux, c'est-à-dire que tous ses mineurs sont nuls.

Observons que si le déterminant (1) était de caractéristique un, il représenterait une variété de Veronese V_3^8 obtenue en rapportant projectivement les quadriques d'un espace à trois dimensions aux hyperplans de l'espace S_9. Dans ces conditions, chacun des mineurs représenterait une surface de Veronese V_2^4 obtenue en rapportant projectivement les coniques d'un plan de S_3 aux hyperplans d'un espace S_5 de S_9.

Si les mineurs du déterminant (1) et par suite le déterminant n'ont pas la caractéristique un mais sont nuls, ils représentent la variété M_3^3 lieu des cordes d'une surface de Veronese V_2^4. Par conséquent, si le déterminant (1) a la caractéristique deux, il représente la variété lieu des cordes d'une variété de Veronese V_3^8.

L'ordre de la variété V_6^{20} est égal au nombre de ses points situés dans un espace à neuf dimensions et en particulier avec un espace à 9 dimensions passant par σ_5. Cet espace à 9 dimensions rencontre σ_9 suivant un espace à trois dimensions. Celui-ci ne rencontre pas la variété unie Ω_3^8 et il lui correspond dans S_9 un espace à trois dimensions rencontrant l'image de l'involution I en dix points. Il en résulte que :

L'image de l'involution I est une variété M_6^{10} *d'ordre* 10, *lieu des cordes d'une variété de Veronese* V_3^8.

4. A un hyperplan de S_{15} passant par σ_5 correspond une polarité entre les espaces (y), (z). Supposons ces espaces superposés. A trois hyperplans de S_{15} correspondent dans l'espace (y) les polarités par rapport à trois quadriques. La transformation birationnelle T dont il a été question plus haut est actuellement involutive et possède huit points unis.

Les trois hyperplans ont en commun un espace S_{12} qui coupe σ_9 suivant un espace ξ_6 à six dimensions, rencontrant Ω_3^8 en huit points. Sur la section V_3^{20} de V_6^{20} par l'espace S_{12}, l'involution engendrée par H possède huit points unis. Soit, sur M_6^{10}, M_3^{10} l'image de cette involution.

Une section de la variété V_3^{20} par un hyperplan passant par σ_5 est une surface de genres $p_a = P_4 = 1$ qui ne rencontre pas en général la variété Ω_3^8. Sur cette surface, H engendre donc une involution privée de points unis. On sait que l'image d'une telle involution est une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = P_6 = 1$.

Les sections de la variété M_6^{10} *de* S_9 *par les espaces à cinq dimensions, sont des surfaces privées de courbe canonique et possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro.*

Aux huit points unis de l'involution existant sur V_3^{20} correspondent huit points quadruples de la variété M_3^{10}. On sait que le cône tangent à la variété en un de ces points a pour sections hyperplanes des surfaces de Veronese (*).

On peut conclure de ceci qua la variété M_6^{10} possède une variété à trois dimensions d'ordre huit quadruple.

Nous avons démontré que si une variété à trois dimensions a pour sections hyperplanes des surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, elle contient un système de surfaces de genres $p_a = P_4 = 1$ dont la dimension est celle de l'espace ambiant diminuée d'une unité (**). La variété M_3^{10}, située dans un espace linéaire à six dimensions, doit donc contenir un système linéaire de dimension cinq de surfaces de genres $p_a = P_4 = 1$. Effectivement, dans S_{12}, un hyperplan passant par ξ_6 coupe V_3^{20} suivant une surface de genres $p_a = P_4 = 1$ et l'involution engendrée par H sur cette surface possède huit points unis. Son image sur la variété M_3^{10} est une surface N_2^{10} de genres $p_a = P_4 = 1$, d'ordre dix.

Les sections hyperplanes de la variété M_3^{10} *sont des surfaces* M_2^{10} *de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_5 = 1$ *et sur cette variété sont tracées* ∞^5 *surfaces* N_2^{10} *de genres* $p_a = P_4 = 1$ *formant un système linéaire de degré six.*

(*) Fano. *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni le cui sezioni iperpiane sono superficie di genere zero e bigenere uno* (Memorie della Società Italiana delle Scienze, 1938, pp. 1-26).

(**) *Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genre zéro et de bigenre un* (Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, 1933, pp. 134-140), *Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de bigenre un* (Idem, 1962, pp. 1251-1257).

Une surface N_2^{10} possède huit points doubles coniques aux huit points quadruples de la variété M_3^{10}.

D'après la théorie des involutions, on a

$$2M_2^{10} \equiv 2N_2^{10} + \Delta,$$

Δ étant la somme des surfaces rationnelles équivalentes aux huit points quadruples de la variété M_3^{10}. Il existe une hyperquadrique touchant la variété le long de chaque surface N_2^{10}.

5. Considérons une hyperquadrique Q de S_{12} transformée en elle-même par l'homographie H et ne contenant pas les axes de cette homographie. La section de la variété V_3^{20} par Q est une surface F projectivement canonique de genres $p_a = p_g = 13, p^{(1)} = 41$.

Sur cette surface, H engendre une involution I_2 du second ordre privée de points unis. Soit F' la surface image de cette involution sur la variété M_3^{10}.

Entre les genres arithmétiques $p_a = 13$ de F et p'_a de F', on a la relation

$$p_a + 1 = 2(p'_a + 1),$$

d'où $p'_a = 6$. On a d'autre part $p'^{(1)} - 1 = 40/2 = 20$. F' a donc les genres

$$p_a = p_g = 6, \quad p^{(1)} = 21.$$

Dans le système canonique de F, il y a deux systèmes composés avec I_2. L'un est découpé par les hyperplans passant par σ_5 et a la dimension six. L'autre est découpé par les hyperplans passant par ξ_6 et a la dimension cinq. Nous avons démontré (*) que le système canonique de F' a pour homologue sur F celui des systèmes précédents qui a la dimension minimum, c'est-à-dire le second.

Le système canonique de ta surface F' *est découpé sur cette surface par tes surfaces* N_2^{10}.

6. Notons que par les mêmes procédés qui ont été utilisés ici, on pourrait établir les propriétés suivantes :

La section par un espace linéaire à 19 dimensions de la variété

(*) *Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, 1932, pp. 672-679).

de Segre V_8^{70} représentant dans un espace à 24 dimensions les couples de points de deux espaces à quatre dimensions, est une variété à trois dimensions dont le système des sections hyperplanes est son propre adjoint.

Ces sections hyperplanes sont des surfaces projectivement canoniques.

Liège, le 23 novembre 1966.