Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 33e année, n° 11, 1964, pp. 607-609

SUR L'ENVELOPPE DES QUADRIQUES ATTACHÉES A UN POINT D'UNE SURFACE

par Lucien GODEAUX

Dans des travaux antérieurs (*), nous avons introduit une suite de quadriques attachée à chaque point d'une surface, la première quadrique de cette suite étant la quadrique de Lie. Deux quadriques consécutives de cette suite se touchent en quatre points, caractéristiques pour chacune des quadriques. L'objet de cette courte note est d'attacher à chaque quadrique de la suite deux quadriques définies d'une manière intrinsèque, découpant sur la quadrique les huit points caractéristiques.

Nous ne reprendrons pas la définition de nos notations, nous renvoyons au dernier de nos travaux cités plus haut.

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. A cette surface nous attachons dans l'espace à cinq dimensions une suite de Laplace ..., U^n, ..., U^1, U, V, V^1, ..., V^n, ... autopolaire par rapport à l'hyperquadrique de Klein Q, les points U, V appartenant à cette hyperquadrique et représentant les tangentes aux asymptotiques u, v en un point x de la surface (x).

La quadrique Φ^n de la suite Φ, Φ^1, ..., Φ^n, ... correspond aux plans $U^n U^{n+1} U^{n+2}$ et $V^n V^{n+1} V^{n+2}$, conjugués par rapport à Q, de la manière suivante. Ces deux plans coupent Q suivant des coniques dont les points représentent les génératrices rectilignes des deux modes de la quadrique.

Appelons C^1, C^2 les points de rencontre de la droite $V^n V^{n+1}$ avec

Manuscrit reçu le 19 novembre 1964.

(*) *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1927, pp. 812-820 ; 1928, pp. 31-41). *La Théorie des surfaces et l'Espace réglé* (Actualités scientifiques, N° 138. Paris, Hermann, 1934). *La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé* (Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique, 1964, pp. 1-84).

l'hyperquadrique Q, par D^1, D^2 ceux de la droite $U^n U^{n+1}$, par C'^1, C'^2 ceux de la droite $V^{n+1} V^{n+2}$ et enfin par D'^1, D'^2 ceux de la droite $U^{n+1} U^{n+2}$. Nous désignerons par c_1, c_2, d_1, d_2, c'_1, c'_2, d'_1, d'_2 les droites correspondant à ces points, droites qui appartiennent toutes à Φ^n.

Nous avons

$$\begin{vmatrix} U^n \\ U^{n+1} \\ U^{n+2} \end{vmatrix}_u = h_n \begin{vmatrix} U^{n-1} \\ U^n \\ U^{n+1} \end{vmatrix},$$

et

$$\begin{vmatrix} V^n \\ V^{n+1} \\ V^{n+2} \end{vmatrix}_u - \begin{vmatrix} V^n \\ V^{n+1} \\ V^{n+2} \end{vmatrix} (\log a^2 k_1^2 \dots k_{n+1} k_{n+2})_n = \begin{vmatrix} V^n \\ V^{n+1} \\ V^{n+3} \end{vmatrix}.$$

On en conclut que la quadrique Φ^n_u coupe la quadrique Φ^n suivant les droites d'_1, d'_2, c_1, c_2.

De même, la quadrique Φ^n_v coupe la quadrique Φ^n suivant les droites d_1, d_2, c'_1, c'_2.

2. Nous allons déterminer les plans de l'espace à cinq dimensions qui correspondent aux quadriques du faisceau déterminé par les quadriques Φ^n et Φ^u_u. L'un de ces plans passe par la droite $V^n V^{n+1}$, l'autre par la droite $U^{n+1} U^{n+2}$.

Menons les droites $D'^1 D'^1_u$, $D'^2 D'^2_u$; elles sont situées dans le plan $U^n U^{n+1} U^{n+2}$ et se coupent en un point A. L'hyperplan polaire de A par rapport à Q passe par les points D'^1, D'^2 donc par la droite $U^{n+1} U^{n+2}$ et par le plan $V^n V^{n+1} V^{n+2}$ conjugué du plan $U^n U^{n+1} U^{n+2}$.

Les droites $C^1 C^1_u$, $C^2 C^2_i$ sont situées dans le plan $V^n V^{n+1} V^{n+2}$ et se coupent en un point B. L'hyperplan polaire de B passe par C^1, C^2 donc par $V^n V^{n+1}$ et par le plan $U^n U^{n+1} U^{n+2}$.

La droite AB est la conjuguée de l'espace à trois dimensions $V^n V^{n+1} U^{n+1} U^{n+2}$. Ses points de rencontre avec Q représentent les diagonales du quadrilatère gauche formé par les droites c_1, c_2, d'_1, d'_2.

Sur la droite AB, les couples de points conjugués par rapport à Q forment une involution dont les points unis sont les points de rencontre de la droite avec Q et dont les points A, B forment un couple. Soient A', B' les points formant un couple de cette involution, distincts de A, B.

Les plans $A' U^{n+1} U^{n+2}$ et $B' V^n V^{n+1}$ sont conjugués par rapport à Q ; leurs sections par cette hyperquadrique représentent les génératrices rectilignes des deux modes d'une quadrique Φ' passant par les droites c_1, c_2, d'_1, d'_2. Lorsque le couple A'B' varie sur la droite AB, la quadrique Φ' décrit un faisceau $|\Phi'|$ contenant les quadriques Φ^n et Φ^n_u. Lorsque les points A', B' coïncident avec l'un des points de rencontre de AB avec Q, la quadrique Φ' correspondante dégénère en deux plans, soient les plans $c_1d'_1$, $c_2d'_2$, soient les plans $c_1d'_2$, $c_2d'_1$.

Observons que les plans $U^{n+1}\,U^{n+2}\,B$ et $V^nV^{n+1}\,A$ sont conjugués par rapport à Q. Il leur correspond une quadrique du faisceau $|\Phi'|$ qui est déterminée d'une manière intrinsèque et est certainement irréductible. Nous la désignerons par Ψ_1.

3. On démontre de même que la quadrique Φ^n_v passe par les droites d_1, d_2, c'_1, c'_2 comme il est indiqué plus haut.

Les droites $D^1D^1_v$ et $D^2D^2_v$ se coupent en un point A_1 et les droites $C'^1\,C'^1_v$, et $C'^2\,C'^2_v$ en un point B_1. La droite A_2B_1 est la conjuguée de l'espace à trois dimensions $U^nU^{n+1}\,V^{n+1}V^{n+2}$.

Si A'_1 et B'_1 sont deux point de la droite A_1B_1 conjugués par rapport à Q, les plans $A'_1U^nU^{n+1}$ et $B'_1V^{n+1}V^{n+2}$ sont conjugués et leurs sections par Q représentent les génératrices rectilignes d'une quadrique Φ'' passant par les droites d_1, d_2, c'_1, c'_2. Les quadriques Φ^n et Φ^n_v appartiennent au faisceau $|\Phi''|$ décrit par la quadrique Φ'' lorsque le couple $A'_1B'_1$ varie sur la droite A_1B_1.

Les plans $U^nU^{n+1}\,B_1$ et $V^{n+1}\,V^{n+2}\,A'_2$ sont conjugués par rapport à Q et on obtient ainsi en correspondance une quadrique Ψ_2 du faisceau $|\Phi''|$ définie d'une manière intrinsèque.

Les quadriques Ψ_1 et Ψ_2 *déterminent les points caractéristiques de la quadrique* Ψ^n.

Liège, le 24 octobre 1964.