Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 33e année, no 11, 1964, pp. 610-614

SUR LES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES D'ORDRE n CIRCONSCRITES A UN $(n + 1)$-èdre

par Lucien GODEAUX

Dans une note déjà ancienne (*), nous avons considéré les surfaces d'ordre n circonscrites à une $(n + 1)$-èdre complet et établi l'existence de surface d'ordre $n - 1$ inscrites dans ces surfaces le long de certaines courbes. Nous avons eu récemment l'occasion de revenir sur ces questions et sur d'autres analogues. L'objet de cette note est de former l'équation des surfaces d'ordre $n - 1$ dont il est question plus haut et de donner une application de la théorie des involutions appartenant à une surface algébrique.

1. Considérons dans un espace linéaire S_n à n dimensions l'hypersurface V^n_{n-1} d'ordre n, d'équation

$$a_0 x_1 x_2 \dots x_n + \dots + a_2 x_0 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n + \dots + a_n x_0 x_1 \dots x_{n-1} = 0.$$

Elle est circonscrite à la figure de référence de S_n et est rationnelle, car la transformation T d'équations

$$\rho x_0 = y_1 y_2 \dots y_n,$$
$$\rho x'_u = y_0 \dots y_{i-1} y_{i+1} \dots y_n,$$
$$\rho x_n = y_0 y_1 \dots y_{n-1},$$

la transforme en un hyperplan

$$A = a_0 y_0 + a_1 y_1 + \dots + a_n y_n = 0.$$

Une seconde hypersurface $\overline{V}^n_{n-1}$ analogue à la précédente,

$$b_0 x_1 x_2 \dots x_n + \dots + b_n x_0 x_1 \dots x_{n-1} = 0$$

rencontre V^n_{n-1} en dehors des espaces linéaires à $n - 2$ dimensions appartenant à la figure de référence, suivant une variété Ω à $n - 2$ dimensions d'ordre

$$n^2 - \tfrac{1}{2}n(n + 1) = \tfrac{1}{2}n(n - 1).$$

(*) *Sur une propriété des surfaces d'ordre n circonscrites à un* $(n + 1)$-*èdre*. (Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liège, 1944, pp. 301-306).

On obtient les équations de Ω de la manière suivante :

Posons

$$A_{ik} = a_i b_k - a_k - a_k\, b_i$$

et entre les équations des variétés V_{n-1}^n et $\overline{V}_{n-1}^n$ éliminons le terme en $x_1 x_2 \ldots x_n$. Nous obtenons, après simplification par x_0, l'équation

$$\varphi_0 = A_{01} x_2 x_3 \ldots x_n + \ldots A_{0i} x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n + \ldots + A_{0n} x_1 x_2 \ldots x_{n-1} = 0.$$

On obtient de même

$$\varphi_1 = A_{10} x_2 x_3 \ldots x_{n+} \ldots + A_{1n} x_0 x_2 \ldots x_{n-1} = 0,$$
$$\varphi_2 = A_{20} x_1 x_3 \ldots x_n + \ldots + A_{2n} x_0 x_1 x_3 \ldots x_{n-1} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_n = A_{n0} x_1 x_2 \ldots x_{n-1} + \ldots + A_{nn} x_0 x_1 \ldots x_{n-2} = 0.$$

Les hypersurfaces ainsi obtenues ne sont pas indépendantes, car on a identiquement

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = 0.$$

Il existe donc un système linéaire de dimension n d'hypersurfaces d'ordre $n - 1$ passant par la variété Ω. Notons que ces hypersurfaces ne rencontrent pas les espaces à $n - 2$ dimensions de la figure de référence en des points variables.

Nous allons démontrer qu'une de ces hypersurfaces,

$$\lambda_0 \varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_n \varphi_n = 0 \tag{1}$$

touche l'hypersurface V_{n-1}^n le long de la variété Ω.

2. La transformation T fait correspondre à l'hypersurface $\overline{V}_{n-1}^n$ l'hyperplan

$$B = b_0 y_0 + b_1 y_1 + \ldots + b_n y_n = 0.$$

A l'hypersurface $\varphi_0 = 0$ correspond l'hypersurface

$$\varphi_0' = y_0 [A_{01} y_1 + A_{02} y_2 + \ldots + A_{0n} y_n] = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\varphi_0' = y_0 (a_0 B - b_0 A) = 0.$$

De même, aux hypersurfaces $\varphi_0 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ..., $\varphi_n = 0$ correspondent les hypersurfaces

$$\varphi_1' = y_1 [a_1 B - b_1 A] = 0,\ \varphi_2' = y_2 [a_2 B - b_2 A] = 0, \ldots,$$
$$\varphi_n' = y_n [a_n B - b_n A] = 0,$$

de sorte qu'aux hypersurfaces du système linéaire (1) correspondent les hyperquatriques du système

$$\lambda_0 y_0(a_0\mathrm{B}-b_0\mathrm{A})+\lambda_1 y_1(a_1\mathrm{B}-b_1\mathrm{A})+\ldots+\lambda_n y_n(a_n\mathrm{B}-b_n\mathrm{A})=0. \qquad (2)$$

Nous devons rechercher celle de ces hyperquatriques qui touche l'hyperplan $\mathrm{A} = 0$ le long de l'espace $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{B} = 0$.

Si, dans l'équation (2) nous faisons $\mathrm{A} = 0$, elle doit se réduire à $\mathrm{B}^2 = 0$, ce qui implique que l'on doit avoir

$$\lambda_0 a_0 y_0 + \lambda_1 a_1 y_1 + \ldots + \lambda_n a_n y_n \equiv \mathrm{B},$$

c'est-à-dire

$$\frac{a_0\lambda_0}{b_0} = \frac{a_1\lambda_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_n\lambda_n}{b_n}.$$

Nous pouvons donc poser

$$\lambda_0 = b_0 a_1 a_2 \ldots a_n,\ \lambda_1 = a_0 b_1 a_2 \ldots a_n,\ \ldots,\ \lambda_n = a_0 a_1 \ldots a_{n-1} b_n.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (1), nous obtenons l'hypersurface

$$b_0 a_1 a_2 \ldots a_n \varphi_1 + a_0 b_1 a_2 \ldots a_n \varphi_2 + \ldots + a_0 a_1 \ldots a_{n-1} b_n \varphi_n = 0,$$

d'ordre $n - 1$ qui touche l'hypersurface V_{n-1}^n le long de la variété Ω.

Notons que l'hypersurface

$$a_0 b_1 b_2 \ldots b_n \varphi_1 + b_0 a_1 b_2 \ldots b_n \varphi_2 + \ldots + b_0 b_1 \ldots b_{n-1} a_n \varphi_n = 0$$

touche l'hypersurface $\overline{\mathrm{V}}_{n-1}^n$ le long de la variété Ω.

3. Coupons la variété V_{n-1}^n par un plan. Nous obtenons une courbe V_n d'ordre n passant par les sommets du $(n + 1)$-latère complet suivant lequel le plan coupe la figure de référence de S_n. La variété Ω est un groupe de $\frac{1}{2}n(n - 1)$ points de V_1^n et il existe une courbe d'ordre $n - 1$ touchant la courbe V_1^n en chaque point de ce groupe.

La courbe V_1^n est de genre $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ et les groupes de $\frac{1}{2}n(n - 1)$ points appartiennent à une série de dimension

$$\frac{1}{2}n(n - 1) - \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) = n - 1.$$

La dimension du système linéaire $|\mathrm{V}_1^n|$ est

$$\frac{1}{2}n(n + 3) - \frac{1}{2}(n)(n + 1) = n$$

et la série caractéristique de la courbe V_1^n a donc bien la dimension $n - 1$.

Le long de chaque groupe caractéristique d'une courbe d'ordre n circonscrite à un $(n + 1)$-latère complet, il existe une courbe d'ordre $n - 1$ touchant cette courbe.

4. Coupons, maintenant la variété V_{n-1}^n par un espace à trois dimensions S_3. Cette section est une surface F d'ordre n circonscrite au $(n + 1)$-èdre complet section de la figure de référence de S_n par S_3. La surface F possède des points doubles coniques aux sommets de ce $(n + 1)$-èdre.

La variété Ω est actuellement une courbe K d'ordre $\frac{1}{2} n(n - 1)$ passant simplement par les sommets du $(n + 1)$-èdre. Le long de cette courbe, il existe une surface d'ordre $n - 1$ touchant la surface F.

Nous retrouvons la surface F étudiée dans la note citée au début et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

La surface d'ordre n circonscrite à un $(n + 1)$-èdre complet contient des courbes d'ordre $\frac{1}{2} n(n - 1)$ passant par les sommets du $(n + 1)$-èdre et il y a une surface d'ordre $n - 1$ touchant la surface le long de chacune de ces courbes.

Nous avons établi que chacune de ces surfaces d'ordre $n - 1$ possède $\binom{n}{3}$ points doubles sur la courbe K qui lui appartient.

5. Supposons n impair et posons $n = 2\nu + 1$. La surface F possède $\binom{2\nu + 2}{3}$ points doubles coniques et il existe sur cette surface une courbe K d'ordre $\nu(\nu + 1)$ le long de laquelle une surface d'ordre 2ν touche la surface F. De plus, si l'on désigne par C les sections planes de F, on a, comme nous l'avons démontré dans la note citée au début, la relation fonctionnelle

$$2\nu C \equiv 2K + M,$$

M désignant la somme des courbes rationnelles de degré virtuel -2 équivalentes aux $\binom{2\nu + 2}{3}$ points doubles coniques de la surface F.

Il en résulte que F est l'image d'une involution du second ordre, possédant $\binom{2\nu+2}{3}$ points unis appartenant à une surface F′ (*).

Aux courbes νC et K correspondent sur F′ des courbes appartenant à un même système linéaire.

Entre les genres arithmétiques p_a de F et p'_a de F′, nous avons la relation

$$12(p'_a + 1) = 24(p_a + 1) - 3\binom{2\nu+2}{3}.$$

Les adjointes d'ordre $2\nu - 3$ à la surface F ne sont assujetties à aucune condition et on a

$$p_a = \frac{2}{3}\,\nu(\nu - 1)\,(2\nu - 1),$$

d'où

$$p'_a = \frac{1}{6}(\nu - 1)\,(14\nu^2 - 13\nu - 6).$$

Liège, le 11 novembre 1964.

(*) Voir L. Godeaux, *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Éditions Cremonese, 1963).