Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 34e année, nº 9-10, 1965, pp. 539-544

RELATION ENTRE LES SURFACES PROJECTIVEMENT CANONIQUES ET LES SURFACES AYANT UNE COURBE CANONIQUE D'ORDRE ZÉRO

par LUCIEN GODEAUX
Membre de la Société

Des recherches récentes pour démontrer l'existence de surfaces algébriques satisfaisant à certaines propriétés nous ont conduit à la remarque qui fait l'objet de cette note.

Nous partons d'une surface F projectivement canonique, c'est-à-dire d'une surface normale dont les courbes canoniques sont ses sections hyperplanes. Nous supposons que cette surface est transformée en soi par une homologie harmonique H de l'espace ambiant, le centre de l'homologie n'appartenant pas à la surface. L'involution déterminée sur la surface par cette homologie a pour image une surface dont la courbe canonique est d'ordre zéro. Cette surface est tracée sur un cône dont les sections hyperplanes sont des variétés de Veronese.

Pour abréger notre exposé, nous désignerons par Ω_n la variété de Veronese à n dimensions obtenue en rapportant projectivement les hyperquadriques d'un espace à n dimensions aux hyperplans d'un espace à $\frac{1}{2}(n+1)(n+2) - 1$ dimensions. On sait que cette variété est d'ordre 2^n et est représentée par un déterminant à $(n+1)^2$ éléments de caractéristique un.

Cela étant, nous démontrons les théorèmes suivants :

Si une surface F *projectivement canonique d'un espace* S_r *est transformée en soi par une homologie harmonique dont le centre n'appartient pas à la surface, l'involution déterminée sur* F *par cette homologie a pour image une surface* Φ *dont la courbe canonique est d'ordre zéro, tracée sur un cône dont les sections hyperplanes sont des variétés de Veronese* Ω_{r-1}.

Manuscrit reçu le 16 septembre 1965.

Si une surface double F *a pour support une surface normale* Φ *dont la courbe canonique a l'ordre zéro, la courbe de diramation étant une section hyperplane, la courbe qui correspond à celle-ci est une courbe canonique de* F.

Si la surface Φ *est tracée sur un cône dont les sections hyperplanes sont des variétés de Veronese, les sections hyperplanes de* F *sont des courbes canoniques de cette surface.*

Nous appliquons le premier de ces théorèmes aux premiers cas particuliers ($r = 3, 4, 5, 6$). Pour terminer, nous examinons l'irrégularité de la surface Φ.

1. Commençons par rappeler une question élémentaire.

Considérons dans un espace linéaire S_r à r dimensions une homologie harmonique H d'équations

$$\rho x'_0 = x_0,\ \rho x'_i = -x_i,\ (i = 1, 2, ..., r).$$

Les hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H forment deux familles : l'une est constituée par des cônes ayant pour sommet le centre de l'homologie, l'autre par les hyperquadriques d'équation

$$\lambda_0 x_0^2 + \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0, \tag{1}$$

φ_2 étant une forme algébrique quadratique à coefficients variables de ses arguments.

L'homologie H détermine dans S_r une involution du second ordre I_2. Pour obtenir une variété image de cette involution, rapportons projectivement les hyperquadriques (1) aux hyperplans d'un espace S_R à $R = \frac{1}{2} r(r+1)$ dimensions. En posant $X_{ik} = x_i x_k$, nous obtenons comme image de I_2 le cône V_r projetant une variété de Veronese Ω_{r-1}, d'ordre 2^{r-1}, du point $O(X_{00} = 1, X_{ik} = 0)$. Les sections hyperplanes de ce cône sont des variétés Ω_{r-1}.

Inversement, un cône de sommet O dont les sections hyperplanes sont des variétés Ω_{r-1} représente l'involution d'ordre deux engendrée dans un espace S_r par une homologie harmonique.

2. Soit F une surface projectivement canonique de S_r, c'est-à-dire une surface dont le système des sections hyperplanes constitue le système canonique complet. Supposons qu'elle soit transformée en soi par l'homologie H et supposons que le centre de l'homologie

n'appartienne pas à la surface. L'homologie H engendre sur F une involution du second ordre I possédant une courbe unie D section de F par l'hyperplan $x_0 = 0$.

Désignons par Φ une image de l'involution I et supposons que cette image soit obtenue en rapportant projectivement les hyperquadriques (1) aux hyperplans de S_R. La surface Φ est tracée sur le cône V_r et dans la correspondance existant entre Φ et F, la courbe de diramation est la section D′ de Φ par l'hyperplan $X_{00} = 0$.

Soit Γ une courbe canonique de Φ et soit C la courbe qui lui correspond sur F. D'après un théorème de Castelnuovo-Enriques, la transformée C de la courbe canonique Γ augmentée de la courbe unie D donne une courbe canonique de F. Le système canonique de F serait donc $|C + D|$. Or, D est une courbe canonique de F, donc la courbe C est d'ordre zéro et il en est de même de la courbe Γ.

La surface Φ possède une courbe canonique d'ordre zéro.

3. Partons maintenant d'une surface Φ dont la courbe canonique est d'ordre zéro. Supposons qu'il existe une surface double F de support Φ ayant comme courbe de diramation D′ une section hyperplane de Φ.

En appliquant le théorème de Castelnuovo-Enriques, la transformée sur F de la courbe canonique de Φ étant d'ordre zéro, on voit que la courbe D qui correspond sur F à D′ est une courbe canonique de F.

Sur une surface double F *ayant comme support une surface* Φ *à courbe canonique d'ordre zéro et comme courbe de diramation une section hyperplane de* Φ, *la transformée de la courbe de diramation est une courbe canonique de* F.

Supposons que la surface Φ soit normale dans un espace S_R et soit tracée sur la variété conique V_r. En remplaçant dans les équations de Φ les X_{ik} par $x_i x_k$, on obtient dans un espace S_r les équations d'une surface F transformée en elle-même par l'homologie H. La courbe D homologue de la courbe de diramation D′ est alors une section hyperplane de F et est d'autre part une courbe canonique de cette surface, donc le système canonique de F comprend les sections hyperplanes de la surface sans que l'on puisse dire cependant qu'elles forment le système canonique complet.

Si une surface normale Φ *à courbe canonique d'ordre zéro est tracée sur un cône dont les sections hyperplanes sont des variétés de Veronese, il existe une surface double* F *de support* Φ *ayant comme courbe de* *diramation une section hyperplane de Φ et les sections hyperplanes de* F *sont des courbes canoniques de la surface.*

4. Supposons $r = 3$ et que la surface F soit une surface du cinquième ordre privée de points multiples. Son équation sera

$$x_0^4 f_1 (x_1, x_2, x_3) + x_0^2 f_3 (x_1, x_2, x_3) + f_5 (x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad (2)$$

où f_1, f_3, f_5 sont des formes algébriques de x_1, x_2, x_3 dont le degré est indiqué par l'indice. Bien que la surface passe par le centre d'homologie, la théorie que nous venons de développer peut être appliquée.

Dans un espace S_6, la surface Φ est tracée sur un cône V_3^4, de sommet O, dont les sections hyperplanes sont des surfaces de Veronese Ω_2.

Pour obtenir les équations de Φ, multiplions les deux membres de l'équation (2) par x_1 par exemple ; nous obtenons une équation

$$X_\infty^2 f_1 (X_{11}, X_{12}, X_{13}) + \ldots = 0,$$

les termes non écrits étant linéaires en X_{11}, X_{12}, X_{13}. Nous obtenons une hypersurface cubique passant par O et coupant le cône V_3^4 suivant la surface Φ et suivant le cône projetant de O la conique

$$X_{11} = X_{12} = X_{13} = 0, \; X_{22}X_{33} - X_{23}^2 = 0.$$

La surface Φ est d'ordre dix. On vérifie facilement que les sections hyperplanes de la surface sont de genre six. La surface, comme la surface F, est régulière et a donc les genres $p_a = P_4 = 1$.

5. Supposons $r = 4$ et que la surface F soit l'intersection d'une hyperquadrique et d'une hypersurface du quatrième ordre. Pour que cette surface soit transformée en soi par l'homologie H, ses équations doivent s'écrire

$$x_0^4 f_0 + x_0^2 f_2 + f_4 = 0, \; x_0^2 f_0' + f_2' = 0, \qquad (3)$$

où les f, f' sont des formes algébriques en x_1, x_2, x_3, x_4 dont le degré est indiqué par l'indice.

La surface Φ est située dans un espace S_{10} à dix dimensions et appartient à un cône V_4^8 de sommet O dont les sections hyperplanes sont des variétés Ω_3 de Veronese.

Aux hypersurfaces (3) correspondent dans S_{10} une hyperquadrique Q et un hyperplan ξ. La surface Φ appartient à ces hypersurfaces et est d'ordre 16. Elle est située dans l'hyperplan ξ c'est-à-dire dans un espace S_9 à 9 dimensions.

Comme la surface F, Φ est régulière et a les genres $p_a = P_4 = 1$.

6. Supposons $r = 5$ et que la surface F soit l'intersection de deux hyperquadriques et d'une hypersurface du troisième ordre. Les équations de cette surface, transformée en soi par H, sont

$$x_0^2 f_1 + f_3 = 0, \; x_0^2 f_0 + f_2 = 0, \; x_0^2 f_0' + f_2' = 0, \tag{4}$$

où les f, f' sont des formes algébriques en x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

La surface Φ appartient à un espace S_{15} à 15 dimensions et est tracée sur un cône V_5^{16} de sommet O dont les sections hyperplanes sont des variétés Ω_4^{16} de Veronese.

En multipliant les deux membres de la première des équations (4) par x_1, on obtient une équation

$$X_{00} f_1 (X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}) + \ldots = 0,$$

où les termes non écrits sont linéaires en $X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}$. C'est une hyperquadrique passant par O et contenant le cône projetant de O la variété de Veronese Ω_3^8 section de Ω_4^{16} par l'espace

$$X_{11} = X_{12} = X_{13} = X_{14} = X_{15} = 0.$$

Aux deux hyperquadriques (4) correspondent des hyperplans ξ_1, ξ_2.

La surface est d'ordre 24 et appartient à l'espace S_{12} commun aux deux hyperplans ξ_1, ξ_2. Elle est régulière et a les genres $p_a = P_4 = 1$.

7. Comme dernier exemple, supposons $r = 6$, la surface F étant l'intersection de quatre hyperquadriques

$$x_0^2 f_0 + f_2 (x_1, x_2, \ldots, x_5) = 0, \; f_2' (x_1, x_2, \ldots, x_5) = 0, \; f_2'' = 0, f_2''' = 0. \tag{5}$$

La surface Φ appartient à un cône V_6^{32} d'ordre 32, de sommet O et dont les sections hyperplanes sont des variétés de Veronese Ω_5^{32}, situé dans un espace S_{21} à 21 dimensions.

Aux hyperquadriques (5) correspondent dans S_{21} quatre hyperplans dont le premier seul ne passe pas par O. Ils ont en commun un espace S_{17} à 17 dimensions, contenant la surface Φ. Celle-ci est l'intersection du cône V_6^{32} avec cet espace.

Les surfaces F et Φ sont régulières et cette dernière a les genres $p_a = P_4 = 1$.

Les espaces ξ_2, ξ_3, ξ_4 ont en commun un espace S_{18} passant par O et coupant le cône V_6^{32} suivant un cône V_3^{32} dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres $p_a = P_4 = 1$. On sait en effet que dans un espace S_5, l'intersection de trois hyperquadriques est une surface de genres $p_a = P_4 = 1$.

8. Reprenons le cas général et supposons que la surface F appartienne à m hyperquadriques. Lorsque l'on suppose que la surface F est transformée en soi par l'homologie H, il y a un certain nombre m' de ces hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H et qui ne passent pas par le centre de l'homologie. A ces hyperquadriques correspondent m' hyperplans de l'espace S_R contenant la surface Φ. Celle-ci appartient donc à un espace à $R - m'$ dimensions.

Soit n l'ordre de la surface F, qui a donc les genres $p_g = r + 1$, $p^{(1)} = n + 1$.

Les courbes bicanoniques de F ont le genre $3n + 1$ et rencontrent la courbe unie D en $2n$ points. D'après la formule de Zeuthen, les sections hyperplanes de Φ ont le genre $n + 1$.

Si la surface Φ est régulière, elle appartient à un espace à $n + 1$ dimensions et on a $R - m' = n + 1$, d'où

$$m' = \frac{1}{2} r(r + 1) - n - 1.$$

Le nombre des hyperquadriques linéairement indépendantes contenant F est égal à

$$m = \frac{1}{2} (r + 1) (r + 2) - P_2,$$

et on a $P_2 = p_a + n + 1$, p_a étant le genre arithmétique de F.

On a $m' \leqslant m$ donc $P_2 \leqslant r + n + 2$.

Observons que si $m' = m$, on a $P_2 = r + n + 2$ et la surface F est régulière.

Si la surface Φ est irrégulière, elle appartient à un espace à $n - 1$ dimensions et on a $R - m' = n - 1$, d'où

$$m' = \frac{1}{2} r(r + 1) - n + 1.$$

On en déduit $P_2 \leqslant r + n$.

Liège, le 8 septembre 1965.