

SUR L'ENVELOPPE DES QUADRIQUES ATTACHÉES EN UN POINT D'UNE SURFACE

PAR

Lucien GODEAUX (Liège)

L'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface (x) se compose de la surface (x) elle-même et en général de quatre nappes qui peuvent se réduire à deux nappes ou à une nappe. Dans ces deux derniers cas particuliers, les lignes asymptotiques des nappes correspondent à celles de la surface (x) . Il n'en est pas de même dans le cas général et pour que cette correspondance ait lieu, une certaine condition doit être remplie ⁽¹⁾.

Si nous désignons par u, v les asymptotiques de la surface (x) , les points U, V de l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 qui représentent les tangentes aux asymptotiques u, v en un point x de (x) , se correspondent dans une transformation de Laplace (Bompiani, Tzitzeica) ⁽²⁾. Ces points appartiennent à une suite de Laplace

$$..., U_n, ..., U_1, U, V, V_1, ..., V_n, ...$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u . Soient C_1, C_2 les points d'intersection avec Q de la droite $V_1 V_2, D_1, D_2$ ceux de la droite $U_1 U_2$. Dans le cas général, ces points sont distincts d'une part de V_1, V_2 , d'autre part de U_1, U_2 . Les tangentes aux courbes v en C_1, C_2 se coupent en un point A ,

⁽¹⁾ Voir notre exposé sur *La Théorie des surfaces et l'espace réglé*. Actualités scient. et industr. N° 138 (Paris, Hermann, 1934) et nos notes : Note sur les surfaces dont les quadriques de Lie ont cinq points caractéristiques (*Bulletin de l'Académie roy. de Belgique*, 1941, pp. 156-164), Recherches sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1959, pp. 91-101).

⁽²⁾ E. BOMPIANI, Sull'equazione di Laplace (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1912, t. 34, pp. 383-407).

G. TZITZEICA, Sur les congruences W (*C. R. de l'Acad. des Sciences*, Paris, t. 152, 1911, pp. 35-37).

les tangentes aux courbes u en un point B , les tangentes aux courbes v en D_1, D_2 se coupent en un point A' , aux courbes u en un point B' . Les quatre points A, A', B, B' appartiennent à la droite déterminée par les points qui représentent sur Q les directrices de Wilczynski de la surface (x) . Les points A et B d'une part, A' et B' d'autre part, sont conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q .

Si A' coïncide avec A , alors B' coïncide avec B et les asymptotiques des quatre nappes de l'enveloppe de la quadrique de Lie sont les courbes u, v . Cette condition est nécessaire et suffisante. Les droites représentées sur Q par les points C_1, C_2, D_1, D_2 (arêtes du quadrilatère de Demoulin) décrivent des congruences W . De plus, les points A, B sont transformés de Laplace l'un de l'autre, les variables étant u, v .

Les plans $U_n U_{n+1} U_{n+2}, V_n V_{n+1} V_{n+2}$ sont conjugués par rapport à Q et les sections de cette hyperquadrique par ces plans représentent deux demi-quadriques de même support Φ_n . On obtient ainsi une suite de quadriques

$$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n-1}, \Phi_n, \dots$$

dont la première est la quadrique de Lie. Si Φ_1 est sa propre polaire réciproque par rapport à Φ_0 , les asymptotiques des quatre nappes de l'enveloppe de Φ_0 correspondent à celles de la surface (x) . Cette condition est nécessaire et suffisante.

Deux quadriques Φ_{n-1}, Φ_n de la suite se touchent en quatre points qui sont caractéristiques pour les deux quadriques. Les enveloppes des quadriques Φ_{n-1}, Φ_n ont donc quatre nappes en commun. Supposons ces quatre nappes distinctes. Peut-on étendre à ces nappes les théorèmes dont il vient d'être question pour $n = 1$? La réponse est affirmative comme nous allons l'établir ⁽³⁾. Observons que dans le cas $n = 1$, on peut utiliser la représentation analytique des points considérés. Pour $n > 1$, il n'en est plus de même et les raisonnements seront purement géométriques. Ils sont d'ailleurs applicables au cas $n = 1$.

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v . Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique Q

⁽³⁾ L. GODEAUX, Sur une correspondance entre surfaces avec conservation des asymptotiques (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1954, pp. 139-146). Correspondance entre surfaces avec conservation des asymptotiques (*Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1960, pp. 642-649).

de Klein, de S_5 , représentant les tangentes au point x de (x) aux asymptotiques u , v . On sait (Bompiani, Tzitzeica) que les points U , V se correspondent dans une transformation de Laplace. Si les coordonnées du point x de (x) sont les coordonnées normales de Wilczynski, on a

$$\frac{\partial U}{\partial u} + 2bV = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial v} + 2aU = 0,$$

a et b étant des fonctions de u , v , non nulles, différentiables autant de fois qu'il sera nécessaire.

Nous désignerons par $U_1, U_2, \dots$ les transformées de Laplace successives de U dans le sens des v et par $V_1, V_2, \dots$ ceux de V dans le sens des u .

La suite de Laplace L :

$$\dots, U_n, \dots, U_1, U, V, V_1, \dots, V_n, \dots \quad (L)$$

est autopolaire par rapport à Q . Le point U_n est le pôle de l'hyperplan $V_{n-2} V_{n-1} V_n V_{n+1} V_{n+2}$ et le point V_n est le pôle de l'hyperplan $U_{n-2} U_{n-1} U_n U_{n+1} U_{n+2}$. En particulier, l'hyperplan polaire de U_1 est $UVV_1V_2V_3$, celui de U est $U_1UVV_1V_2$, celui de V est $U_2U_1UVV_1$, celui de V_1 est $U_3U_2U_1UV$.

Nous supposons la suite L illimitée dans les deux sens.

La droite UV appartient à l'hyperquadrique Q , mais les points U_1, V_1 ne peuvent appartenir à Q . Quant aux autres points de la suite L , ils n'appartiennent pas en général à Q . Nous nous placerons dans ce cas.

Les plans $U_n U_{n+1} U_{n+2}$ et $V_n V_{n+1} V_{n+2}$ sont conjugués par rapport à Q par conséquent les sections de cette hyperquadrique par ces plans représentent les deux systèmes de génératrices rectilignes d'une quadrique Φ_n . En faisant $n = 0, 1, 2, \dots$, on obtient une suite de quadriques $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n, \dots$ dont la première est la quadrique de Lie Φ . Deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points, caractéristiques pour chacune des quadriques. Dans les conditions données ci-dessus, les quadriques de la suite ne sont pas dégénérées.

2. Considérons deux quadriques successives Φ_{n-1}, Φ_n ($n > 0$) et désignons par C_1, C_2 les points de rencontre de la droite $V_n V_{n+1}$ avec Q et par D_1, D_2 ceux de la droite $U_n U_{n+1}$. Les premiers sont distincts de V_n, V_{n+1} , les seconds de U_n, U_{n+1} . Soient c_1, c_2 les

droites représentées par C_1, C_2, d_1, d_2 celles qui sont représentées par D_1, D_2 . Ces droites forment un quadrilatère gauche suivant lequel les quadriques Φ_{n-1}, Φ_n se rencontrent. Les sommets $p_{11} = (c_1, d_1), p_{12} = (c_1, d_2), p_{21} = (c_2, d_1), p_{22} = (c_2, d_2)$ sont des points caractéristiques des quadriques Φ_{n-1}, Φ_n .

Les faisceaux de tangentes aux quadriques Φ_{n-1}, Φ_n aux points $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$ sont respectivement représentés sur Q par les droites $C_1 D_1, C_1 D_2, C_2 D_1, C_2 D_2$.

Soient g_1, g_2 les diagonales $p_{11} p_{22}, p_{12} p_{21}$ du quadrilatère, G_1, G_2 les points qui les représentent sur Q .

Les droites c_1, g_1 se rencontrent au point p_{11} , donc la droite $C_1 G_1$ appartient à Q et si $\Omega(X, Y) = 0$ est la condition pour que deux points X, Y soient conjugués par rapport à Q , on a $\Omega(C_1, G_1) = 0$. Le même raisonnement montre que les points G_1, G_2 sont conjugués des points C_1, C_2, D_1, D_2 . Il en résulte que la droite $G_1 G_2$ est la conjuguée de l'espace à trois dimensions $C_1 C_2 D_1 D_2$, c'est-à-dire de l'espace $U_n U_{n+1} V_n V_{n+1}$.

L'espace à trois dimensions conjugué de la droite $V_n V_{n+1}$ est $U_{n-1} U_n U_{n+1} U_{n+2}$ et celui de la droite $U_n U_{n+1}$ est $V_{n-1} V_n V_{n+1} V_{n+2}$, donc la droite $G_1 G_2$ est l'intersection de ces deux espaces.

Soient $C_1 C'_1, C_2 C'_2$ les tangentes en C_1, C_2 aux lignes v tracées sur les surfaces $(C_1), (C_2)$. Elles appartiennent au plan $V_{n-1} V_n V_{n+1}$ et se rencontrent donc en un point A .

L'hyperplan polaire de A contient les points $U_{n-1}, U_n, U_{n+1}, V_n, V_{n+1}$, donc l'espace conjugué de la droite $G_1 G_2$. Il en résulte que le point A appartient à la droite $G_1 G_2$. C'est l'intersection de la droite $G_1 G_2$ avec le plan $V_{n-1} V_n V_{n+1}$.

De même les tangentes $D_1 D'_1, D_2 D'_2$ en D_1, D_2 aux lignes u tracées sur les surfaces $(D_1), (D_2)$ se rencontrent en un point B appartenant à la droite $G_1 G_2$. C'est l'intersection de cette droite avec le plan $U_{n-1} U_n U_{n+1}$.

Soient maintenant $C_1 C''_1, C_2 C''_2$ les tangentes en C_1, C_2 aux lignes u tracées sur les surfaces $(C_1), (C_2)$. Elles appartiennent au plan $V_n V_{n+1} V_{n+2}$ et se coupent en un point B' . L'hyperplan polaire de B' contient les points $U_n, U_{n+1}, U_{n+2}, V_n, V_{n+1}$ et par conséquent l'espace conjugué à la droite $G_1 G_2$. Le point B' appartient donc à cette droite et est son intersection avec le plan $V_n V_{n+1} V_{n+2}$.

Les tangentes $D_1 D''_1, D_2 D''_2$ aux points D_1, D_2 aux courbes v

tracées sur les surfaces (D_1) , (D_2) se coupent en un point A' intersection de la droite G_1G_2 avec le plan $U_nU_{n+1}U_{n+2}$.

Nous avons vu que l'hyperplan polaire de A était $U_{n-1}U_nU_{n+1}V_nV_{n+1}$, il contient donc le point B qui appartient au plan déterminé par les trois premiers points. Par conséquent les points A et B sont conjugués par rapport à Q .

De même, l'hyperplan polaire de B' est $U_nU_{n+1}U_{n+2}V_nV_{n+1}$, il contient le point A' et les points A' , B' sont conjugués par rapport à Q .

3. Supposons que les asymptotiques de la surface (p_{11}) correspondent à celles, u , v , de la surface (x) . Les points $\bar{U}$, $\bar{V}$ qui représentent sur la droite C_1D_1 les tangentes aux asymptotiques u , v en un point p_{11} de la surface (p_{11}) sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Désignons par $\bar{U}_1$ le transformé de Laplace de $\bar{U}$ dans le sens des v et par $\bar{V}_1$ celui de $\bar{V}$ dans le sens des u .

Le plan tangent à la développable engendrée par la droite C_1D_1 lorsque v varie est le plan $\bar{V}\bar{U}\bar{U}_1$ et le plan tangent à la développable engendrée par la droite V_nV_{n+1} lorsque v varie est $V_{n+1}V_nV_{n-1}$, donc la droite $C_1C'_1$ est l'intersection de ces deux plans. Si les droites $\bar{U}\bar{U}_1$ et V_nV_{n+1} se rencontrent, on peut supposer que le point de rencontre est C'_1 . La tangente en C'_1 à la ligne u tracée sur (C') est l'intersection des plans $\bar{U}_1\bar{U}\bar{V}$, $V_{n-1}V_nV_{n+1}$ tangents aux développables engendrées par les droites $\bar{U}_1\bar{U}$, $V_{n-1}V_n$ lorsque u varie. C'est donc la droite C'_1C_1 et les points C_1 , C'_1 se correspondent dans une transformation de Laplace.

Nous supposons que les droites $\bar{U}_1\bar{U}$, $V_{n-1}V_n$ ne se rencontrent pas.

La tangente $C_1C''_1$ en C_1 à la courbe u tracée sur (C_1) est l'intersection des plans $\bar{U}\bar{V}\bar{V}_1$, $V_nV_{n+1}V_{n+2}$ tangents aux développables engendrées par les droites $\bar{U}\bar{V}$, V_nV_{n+1} lorsque u varie. Si les droites $\bar{V}\bar{V}_1$ et $V_{n+1}V_{n+2}$ se rencontrent, le point de rencontre et C_1 se correspondent dans une transformation de Laplace.

Supposons que les droites $\bar{V}\bar{V}_1$ et $V_{n+1}V_{n+2}$ ne se rencontrent pas.

Appelons C'_1 le point de rencontre de $C_1C'_1$ avec la droite V_nV_{n-1} et $\bar{C}'_1$ celui de la même droite avec $\bar{U}\bar{U}_1$. Lorsque u varie, l'espace tangent à la réglée $(C_1C'_1)$ le long de $C_1C'_1$ contient la tangente en C'_1 à la ligne u , qui s'appuie sur V_nV_{n+1} ; la tangente en $\bar{C}'_1$ à la ligne u , qui s'appuie sur $\bar{U}\bar{V}$, la tangente $C_1C''_1$ à la

ligne u qui rencontre les droites $\bar{V}\bar{V}_1$ et $V_{n+1}V_{n+2}$. Il en résulte que l'espace à trois dimensions tangent à la réglée contient les points V_{n-1} , V_n , V_{n+1} , V_{n+2} , $\bar{V}_1$, $\bar{V}$, $\bar{U}$, $\bar{U}_1$. Les espaces $V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$ et $\bar{V}_1\bar{V}\bar{U}\bar{U}_1$ coïncident donc et il doit en être de même de leurs polaires, c'est-à-dire des droites U_nU_{n+1} et $\bar{U}\bar{V}$. Nous sommes donc conduit à une absurdité et les droites $\bar{U}\bar{U}_1$ et V_nV_{n-1} d'une part les droites $\bar{V}\bar{V}_1$ et $V_{n+1}V_{n+2}$ d'autre part, se rencontrent.

Le point C_1 et de même le point D_1 décrivent des réseaux conjugués (u, v) . Il en résulte que les droites c_1 , d_1 engendrent des congruences W et que sur les surfaces (p_{12}) , (p_{21}) les courbes u , v sont les asymptotiques. Mais alors, d'après le raisonnement fait plus haut, les points C_2 , D_2 décrivent des réseaux conjugués (u, v) et les droites c_2 , d_2 décrivent des congruences W . Les lignes u , v sont aussi les asymptotiques de la surface (p_{22}) .

Si les asymptotiques d'une des surfaces (p_{11}) , (p_{12}) , (p_{21}) , (p_{22}) correspondent à celles u , v de la surface (x) , les trois autres surfaces possèdent la même propriété.

Observons que le plan $\bar{V}\bar{U}\bar{U}_1$ passant par C_1 , C'_1 , contient le point A et que le plan $\bar{U}\bar{V}\bar{V}_1$ passe par le point B .

4. Les points C_1 , C_2 appartiennent à des suites de Laplace inscrites dans la suite L . Nous désignerons par C'_1 , C'_2 les transformés de ces points dans le sens des v et par C''_1 , C''_2 leurs transformés dans le sens des u . Les points C'_1 , C'_2 appartiennent à la droite $V_{n-1}V_n$, les points C''_1 , C''_2 à la droite $V_{n+1}V_{n+2}$.

La tangente en A à la courbe u tracée sur la surface (A) est l'intersection des plans tangents le long des droites $C_1C'_1$, $C_2C'_2$ aux développables engendrées par ces droites lorsque u varie, c'est-à-dire l'intersection des plans $C'_1C'_1C''_1$, $C'_2C'_2C''_2$. Ces plans sont tangents en C_1 , C_2 aux surfaces (C_1) , (C_2) et passent donc par la droite G_1G_2 ou AB . Donc, la tangente en A à la courbe u tracée sur (A) est la droite AB .

Les points D_1 , D_2 déterminent des suites de Laplace inscrites dans la suite L . Soient D'_1 , D'_2 les points de cette suite situés sur la droite $U_{n-1}U_n$ et D''_1 , D''_2 ceux qui sont situés sur $U_{n+1}U_{n+2}$.

La tangente en B à la ligne v tracée sur la surface (B) est l'intersection des plans tangents le long des droites D'_1D_1 , D'_2D_2 aux développables engendrées par ces droites lorsque v varie. Ces plans sont les plans $D'_1D_1D''_1$, $D'_2D_2D''_2$ tangents en D_1 , D_2 aux surfaces (D_1) , (D_2) . Ils passent par la droite AB et par suite

la tangente à la courbe v tracée sur (B) en B est la droite BA . Il en résulte que les points A, B sont transformés de Laplace l'un de l'autre, les variables étant u, v .

La tangente en A' à la courbe u tracée sur la surface (A') est l'intersection des plans $D_1''D_1D_1', D_2D_2D_2'$ tangents aux développables engendrées par les droites $D_1D_1', D_2''D_2$ lorsque u varie. Ces plans contiennent la droite AB et la tangente considérée est la droite AB . Par conséquent, les points A', B sont transformés de Laplace l'un de l'autre et A' coïncide donc avec A .

On démontrerait de même que les points B, B' coïncident. D'ailleurs les points A et B, A' et B' sont conjugués par rapport à Q et si A' coïncide avec A, B' doit coïncider avec B .

Si les asymptotiques des surfaces $(p_{11}), (p_{12}), (p_{21}), (p_{22})$ correspondent à celles de la surface (x) , les points A, B coïncident respectivement avec les points A', B' et les points A, B se correspondent dans une transformation de Laplace.

5. Désignons par $A_1, A_2, \dots$ les transformés successifs de Laplace de A dans le sens des v et par $B_1, B_2, \dots$ ceux de B dans le sens des u .

Le point B appartenant au plan $U_{n-1}U_nU_{n+1}$, son transformé de Laplace B_1 appartient au plan $U_{n-2}U_{n-1}U_n$ et son transformé de Laplace B_i appartient au plus $U_{n-i-1}U_{n-i}U_{n-i+1}$. En particulier, ses transformés de Laplace $B_{n-1}, B_n, B_{n+1}, B_{n+2}$ appartiennent respectivement aux plans $UU_1U_2, VUU_1, V_1VU, V_2V_1V$. Le transformé B_{n+2+j} appartient au plan $V_jV_{j+1}V_{j+2}$. En particulier, le transformé B_{2n+1} appartient au même plan $V_{n-1}V_nV_{n+1}$ que A et B_{2n+2} au même plan $V_nV_{n+1}V_{n+2}$ que B .

De même, le point A_{2n+1} appartient au même plan $U_{n-1}U_nU_{n+1}$ que B et A_{2n+2} au même plan $U_nU_{n+1}U_{n+2}$ que A .

Appelons polyèdre à faces planes associé à la suite L l'ensemble des plans déterminés par trois points consécutifs de cette suite.

La suite de Laplace

$$\dots, B_m, \dots, B_1, B, A, A_1, \dots, A_m, \dots$$

est doublement inscrite dans le polyèdre à faces planes associé à la suite de Laplace L .

6. Nous venons de voir que si les asymptotiques des surfaces $(p_{11}), (p_{12}), (p_{21}), (p_{22})$ correspondent à celles, u, v , de la surface (x)

le point A' coïncide avec A et le point B' avec B . La réciproque est-elle vraie? Si les points A' , B' coïncident respectivement avec A , B y a-t-il conservation des asymptotiques sur les cinq surfaces dont il vient d'être question? La réponse est affirmative comme nous allons le voir.

Supposons donc que A' coïncide avec A et B' avec B . Considérons le plan C_1D_1A , qui contient les tangentes $C_1C'_1$, $D_1D''_1$ aux courbes ν tracées sur les surfaces (C_1) , (D_1) aux points C_1 , D_1 . Ce plan rencontre l'hyperquadrique Q suivant la droite C_1D_1 comptée deux fois. Lorsque ν varie, ce plan touche la réglée engendrée par la droite C_1D_1 en tout point de celle-ci et cette réglée est donc une développable. Soit M le point de l'arête de rebroussement situé sur la droite C_1D_1 . La tangente à la ligne ν en M est la droite C_1D_1 .

De même, lorsque u varie, la droite C_1D_1 engendre une développable dont le plan tangent le long de C_1D_1 est C_1D_1B , plan qui coupe Q suivant la droite C_1D_1 comptée deux fois. Si N est le point de l'arête de rebroussement de la développable situé sur C_1D_1 , la tangente à la courbe u en N est C_1D_1 .

Il en résulte que les points M , N se correspondent dans une transformation de Laplace et représentent les tangentes aux asymptotiques u , ν en p_{11} à la surface (p_{11}) .

On démontre de même que les courbes u , ν sont les asymptotiques des surfaces (p_{12}) , (p_{21}) , (p_{22}) .

La condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotiques des surfaces (p_{11}) , (p_{12}) , (p_{21}) , (p_{22}) correspondent à celles de la surface (x) est que le point A' coïncide avec A (ou que B' coïncide avec B).

Rappelons que la condition A' coïncide avec A entraîne que B' coïncide avec B et réciproquement.

7. Soit θ la polarité par rapport à la quadrique Φ_{n-1} . Dans l'espace S_5 , il correspond à θ une homographie harmonique H , biaxiale, dont les axes sont les plans $U_{n-1}U_nU_{n+1}$, $V_{n-1}V_nV_{n+1}$, qui transforme l'hyperquadrique Q en elle-même.

Supposons que les asymptotiques des surfaces (p_{ik}) soient les courbes u , ν . Le plan $V_nV_{n+1}V_{n+2}$ coupe le premier axe de H au point B et le second suivant la droite V_nV_{n+1} , il est donc uni pour H . Dans ce plan, H détermine une homologie harmonique de centre B et d'axe V_nV_{n+1} , qui transforme en elle-même la conique section de Q par le plan $V_nV_{n+1}V_{n+2}$. Il en résulte que θ

fait se correspondre les génératrices rectilignes de Φ_n de même mode que c_1, c_2 , ces dernières droites étant unies.

En considérant l'homologie harmonique déterminée par H dans le plan $U_n U_{n+1} U_{n+2}$, on voit que θ fait correspondre aux génératrices rectilignes de même mode que d_1, d_2 , ces mêmes génératrices, d_1 et d_2 étant unies.

La quadrique Φ_n est sa propre polaire réciproque par rapport à Φ_{n-1} .

Partons maintenant de l'hypothèse que la quadrique Φ_n est sa propre polaire réciproque par rapport à Φ_{n-1} . Nous allons voir que cette hypothèse suffit pour que les surfaces (p_{ik}) aient pour asymptotiques les courbes u, v .

Les plans $U_n U_{n+1} U_{n+2}$ et $V_n V_{n+1} V_{n+2}$ sont unis pour H et comme ils sont distincts et que chacun rencontre un axe de H suivant une droite, il faut que chacun d'eux rencontre l'autre axe en un point. Nous supposons que le premier rencontre $V_{n-1} V_n V_{n+1}$ en un point A'' et le second $U_{n-1} U_n U_{n+1}$ en un point B'' .

La droite AB est unie pour H , puisqu'elle s'appuie sur chacun des axes de cette homographie. L'homologue de B' appartient donc à la droite AB . Mais comme B' appartient également au plan $V_n V_{n+1} V_{n+2}$, son homologue doit aussi se trouver dans ce plan. Or, ce plan ne peut rencontrer la droite AB qu'au seul point B' , donc celui-ci est uni et doit coïncider avec B et avec B'' .

On démontre de même que A' doit coïncider avec A et avec A'' .

Les points A et A' , B et B' coïncidant, les asymptotiques des surfaces (p_{ik}) sont les courbes u, v .

Une condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotiques des surfaces $(p_{11}), (p_{12}), (p_{21}), (p_{22})$ correspondent à celles de la surface (x) est que la quadrique Φ_n soit sa propre polaire réciproque par rapport à la quadrique Φ_{n-1} .