Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 32e année, no 9, 1963, pp. 597-601

SURFACES ASSOCIÉES A UNE SUITE DE LAPLACE PÉRIODIQUE

par Lucien GODEAUX,
Membre de la Société

A une surface (x) rapportée à ses asymptotiques u, v, nous avons associé dans un espace linéaire S_5 à cinq dimensions une suite de Laplace L déterminée par les points de l'hyperquadrique de Klein Q qui représentent les tangentes aux asymptotiques de la surface (1). Une question qui se pose est la détermination des surfaces associées à une suite L périodique. La suite L est alors également associée à une seconde surface $(\bar{x})$.

Lorsque la suite L a la période six, les surfaces (x) et $(\bar{x})$ ont mêmes quadriques de Lie. Ces surfaces ont été rencontrées par Demoulin et ont fait l'objet de nos recherches (2). Lorsque la suite L a la période huit, nous avons déterminé la surface $(\bar{x})$ (3).

Dans le cas où la période de la suite L est quelconque, nécessairement paire, la possibilité de l'existence des surfaces (x) et (x) a été établie par M. Carton dans une thèse de doctorat restée inédite (4).

Dans cette note, nous démontrons tout d'abord que la période de la suite L est nécessairement paire, puis nous donnons une

(1) Voir notre exposé sur *La Théorie des surfaces et l'Espace réglé*, Actualités scient., No 138 (Paris, Hermann, 1934).

(2) Demoulin, *Sur la quadrique de Lie* (C. R., 1908, t. CXLVII, pp. 493-496), *Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques* (C. R., 1924, t. CLXXIX, pp. 20-23), L. Godeaux, *Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1928, pp. 158-186, 345-348), *Sur les congruences de M. Goursat et les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie* (Idem, pp. 455-466).

(3) *Sur les surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1953, pp. 245-254, 363-368).

(4) Barner, *Figures différentielles qui se ferment* (Deuxième Colloque de Géométrie différentielle du C.B.R.M., Liège, 1961). Louvain, 1962, pp. 29-44.

Manuscrit reçu le 19 septembre 1963.

condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la périodicité de la suite L, sous une forme différente de M. Carton et par d'autres méthodes.

1. Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v. Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 qui représentent les tangentes xx_u, xx_v aux asymptotiques en un point x de (x). Les points U, V sont transformés de Laplace l'un de l'autre et on a précisément

$$U_u + 2bV = 0, \quad V_v + 2aU = 0.$$

Ces points déterminent une suite de Laplace L,

$$\ldots,\ U^n,\ \ldots,\ U^1,\ U,\ V,\ V^1,\ \ldots,\ V^n,\ \ldots \tag{L}$$

où les indices supérieurs sont des numéros d'ordre et où chaque point est le tranformé du précédent dans le sens des u.

La suite L est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q en ce sens que les hyperplans polaires des points U^n et V^n sont respectivement

$$V^{n-2}V^{n-1}V^nV^{n+1}V^{n+2} \quad \text{et} \quad U^{n-2}U^{n-1}U^nU^{n+1}U^{n+2}.$$

Nous allons supposer que la suite L est périodique et nous montrerons d'abord que la période est nécessairement un nombre pair.

2. Supposons que la période de la suite L soit un nombre impair $2n + 1$. Alors, les point U^n et V^n coïncident.

Les plans $U^{n-1}U^nU^{n+1}$ et $V^{n-1}V^nV^{n+1}$ sont conjugués par rapport à Q et d'autre part coïncident en un plan ρ. Tout point de ce plan est son conjugué par rapport à Q et le plan ρ appartient donc à cette hyperquadrique.

Soit r la droite représentée par le point $U^n = V^n$. Cette droite, lorsque u, v varient, engendre une congruence (r).

Le plan tangent à la surface (U^n) en un point U^n étant le plan ρ, toute courbe tracée sur (U^n) a toutes ses tangentes appartenant à Q ; elle représente donc une développable de la congruence (r). Toute surface appartenant à cette congruence est par conséquent une développable et par suite (r) est un plan réglé ρ_0 ou une gerbe de rayons de sommet R_0.

Le plan réglé ρ_0 est représenté sur Q par un plan fixe ρ'_0 et par conséquent le réseau (U^n) est situé dans ce plan. Mais alors, les points U^{n-1}, U^{n+1} appartiennent également à ce plan et la suite L est plane, ce qui est absurde.

La gerbe réglée de sommet R_0 est également représentée sur Q par un plan fixe et le raisonnement précédent montre que la suite L est plane, ce qui est absurde.

On en conclut que : *Si une surface est associée à une suite de Laplace* L *périodique, la période est un nombre pair.*

3. Supposons que la suite L ait la période $2n + 2$, c'est-à-dire que le point U^{2n+2} coïncide avec le point U. Plus généralement, le point U^i coïncide avec le point V^{2n-i+1} et le point V^i avec le point U^{2n-i+1}.

Posons

$$h_{i+1} = -(\log . bh_1 \ldots h_i)_{uv} + h_i, \qquad h_0 = 4ab,$$
$$k_{i+1} = -(\log . ak_1 \ldots k_i)_{uv} + k_i, \qquad k_0 = 4ab,$$
$$H^{i+1} = (\log . ah_1 \ldots h_i), \; K^{i+1} = (\log . ak_1 \ldots k_i).$$

Rappelons que le point U^i satisfait à l'équation de Laplace

$$U^i_{uv} - H^i_v U^i_u - h_i U^i = 0,$$

et le point V^i à l'équation

$$V^i_{uv} - K^i_u V^i_v - k_i V^i = 0.$$

Les coordonnées du point U^i sont proportionnelles à celles du point V^{2n-i+1} et par suite les invariants des équations de Laplace auxquelles satisfont ces points sont égaux. On obtient ainsi

$$h_{n-i} = k_{n+i+2}, \; i = -(n+2), \ldots, n.$$

4. Le point U^{2n+2} satisfait à l'équation

$$U^{2n+2}_{uv} - H^{2n+2}_v U^{2n+2}_u - h_{2n+2} U^{2n+2} = 0 \tag{1}$$

et le point U à l'équation

$$U_{uv} - H^0_v U_u - 4abU = 0. \tag{2}$$

Les points U^{2n+2} et U devant coïncider, posons

$$U^{2n+2} = \lambda U$$

dans l'équation (1) et identifions l'équation obtenue avec l'équation (2). Nous obtenons

$$\lambda H^0_v + \lambda_v - \lambda H^{2n+2}_v = 0, \quad \lambda_u = 0, \quad h_{2n+2} = 4ab \tag{3}$$

d'où

$$(\log \lambda)_v = (\log h_1 h_2 \ldots h_{2n+2})_v$$

et enfin, en remplaçant h_{2n+2} par $4ab$,

$$(\log \lambda)_{uv} = (\log abh_1 \ldots h_{2n+1})_{uv} = 0.$$

Nous devons donc avoir

$$(abh_1h_2 \ldots h_{2n+1})_{uv} = 0. \qquad (1)$$

Nous pouvons trouver, en vertu de la relation (1), une valeur de λ satisfaisant aux équations (3). Posons alors $X = \lambda U$. L'équation (2) conduit à voir que X satisfait à l'équation (1), d'où $X = U^{2n+2}$ et la suite L a la période $2n + 2$.

La condition nécessaire et suffisante pour que la suite L *ait la période* $2n + 2$ *est que la relation* (1) *soit vérifiée et que l'on ait* $h_{2n+2} = 4ab$.

Observons que la relation $h_{2n+2} = 4ab$ peut être remplacée par

$$(\log b^{2n+2}h_1^{2n+1}h_2^{2u} \ldots h_{2n}^2 h_{2n+1})_{uv} = 0.$$

Si l'on était parti des équations vérifiées par les points V et V^{2n+2}, on aurait obtenu les conditions

$$(abk_1 \ldots k_{2n+1})_{uv} = 0$$

et $k_{2n+2} = 4ab$, équivalentes aux précédentes.

5. Lorsque la suite L a la période $2n + 2$, le point V^{n+1} coïncide avec le point U^n et le point U^{n+1} avec le point V^n.

Le point V^{n+1} satisfait à l'équation de Laplace

$$V_{uv}^{n+1} - K_u^{n+1}V_v^{n+1} - k_{n+1}V^{n+1} = 0 \qquad (1)$$

et le point U^n à l'équation

$$U_{uv}^n - H_v^n U_u^n - h_n U^n = 0. \qquad (2)$$

Remplaçons dans l'équation (1) V^{n+1} par λU^n et identifions l'équation obtenue avec l'équation (2). Il vient

$$(\log \lambda)_v + H_v^n = 0, \ (\log \lambda)_u = K_u^{n+1}, \ k_{n+1} = K_{n+1}. \qquad (3)$$

On a donc

$$(\log \lambda)_{uv} = -H_{uv}^n = K_{uv}^{n+1},$$

d'où

$$(\log bh_1 \ldots h_n ak_1 \ldots k_{n+1})_{uv} = 0,$$

$$(bh_1 \ldots h_n ak_1 \ldots k_{n+1})_{uv} = 0,$$

relation équivalente à la relation (1).

Inversement, si les relations (3) sont vérifiées, on a

$$V^{n+1} = \lambda U^n$$

et L a la période $2n + 2$.

6. Les points U^n, V^n et la droite U^nV^n appartiennent à l'hyperquadrique Q, mais les points U^{n-1} et V^{n-1} ne peuvent appartenir à cette hyperquadrique.

Supposons en effet que le point U^{n-1} appartienne à l'hyperquadrique Q. Alors le plan $U^{n-1}U^nV^n$ appartient à cette hyperquadrique et en répétant le raisonnement fait au n° 1 on voit que la droite représentée par le point U^n appartient à un plan fixe ou passe par un point fixe. Dans ces conditions, le plan $U^{n-1}U^nV^n$ est indépendant de u, v et la suite L est plane, ce qui est absurde.

La droite U^nV^n représente un faisceau de droites de sommet $\bar{x}$ et ce point décrit une surface $(\bar{x})$ dont les asymptotiques sont les courbes u, v. Les points U^n, V^n représentent respectivement les tangentes $\overline{xx}_v$, $\overline{xx}_u$ aux courbes u, v en $\bar{x}$.

Liège, le 16 septembre 1963.