# Sur les surfaces dont les réglées asymptotiques des deux modes appartiennent à des complexes linéaires,

par Lucien Godeaux (Liège).

On peut attacher à une surface quatre familles de surfaces réglées : les deux familles de développables S dont les arêtes de rebroussement sont les asymptotiques de la surface et les deux familles de surfaces gauches R lieux des tangentes aux asymptotiques d'un mode aux points d'une asymptotique de l'autre mode.

Les surfaces dont les surfaces S d'une des familles ou des deux familles appartiennent à des complexes linéaires sont bien connues ; elles ont été complètement déterminées par M. Terracini (1). Nous avons appelé l'attention, à plusieurs reprises, sur les surfaces dont les réglées gauches R d'une famille appartiennent à des complexes linéaires (2). Nous donnons, dans cette note, quelques résultats sur les surfaces dont les surfaces R des deux familles appartiennent à des complexes linéaires. Nous utilisons dans ce but la suite de Laplace associée, dans un espace linéaire à cinq dimensions, à la surface considérée. Nous utilisons la

---

(1) A. Terracini, *Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari*. Appendice IV à la *Geometria proiettiva differenziale de* MM. Fubini et Cech (Bologne, Zanichelli, 1927).

(2) *Sur les surfaces associées à une suite de Laplace terminée* (Colloque de Géométrie différentielle du Centre Belge de Recherches Mathématiques ; Louvain, 1950. Masson, Paris, 1951). *Alcune osservazioni sulle congruenze W* (Rendiconti del Seminario Matematico di Torino, 1953-54, pp. 39-46). *Sur les surfaces dont les réglées gauches asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires* (Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 1955, pp. 57-63). *Surfaces dont les réglées gauches asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1958, pp. 311-319).

terminologie et les notations de notre exposé sur *La Théorie des surfaces et l'espace réglé* [1].

**1.** Soit $(x)$ une surface rapportée à ses asymptotiques $u$, $v$. On peut lui attacher quatre familles de surfaces :

Les développables $S_u$ ou $S_v$, lieux des tangentes à une courbe $u$ (sur laquelle $u$ varie) ou à une courbe $v$ ;

Les réglées gauches $R_u$, lieux des tangentes aux courbes $v$ aux points d'une courbe $u$ et $R_v$, lieux des tangentes aux courbes $u$ aux points d'une courbe $v$.

Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique Q de Klein, de $S_5$, représentant les tangentes $xx^{10}$ à la courbe $u$ et $xx^{01}$ à la courbe $v$ au point $x$.

Sur la surface (U), une courbe $u$ représente une développable $S_u$ et une courbe $v$, une réglée asymptotique $R_v$.

Sur la surface (V), une courbe $u$ représente une réglée asymptotique $R_u$ et une courbe $v$, une développable $S_v$.

Si l'on veut que les réglées $R_u$ appartiennent à des complexes linéaires, il faut que les courbes $u$ sur la surface (V) appartiennent à des hyperplans et de même, si l'on veut que les réglées $R_v$ appartiennent à des complexes linéaires, il faut que les courbes $v$ sur la surface (U) appartiennent à des hyperplans.

**2.** Les coordonnées normales de Wilczynski du point $x$ de la surface $(x)$ satisfont au système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$

$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0.$$

On a alors

$$\mathrm{U}^{10} + 2b\mathrm{V} = 0, \qquad \mathrm{V}^{01} + 2a\mathrm{U} = 0.$$

Soient $\mathrm{U}_1$, $\mathrm{U}_2$, ... les transformés successifs de Laplace de U dans le sens des $v$, $\mathrm{V}_1$, $\mathrm{V}_2$, ... ceux de V dans le sens des $u$. Nous désignerons par L la suite de Laplace à laquelle appartiennent ces points.

(1) Actualités scient. N° 138 (Paris, Hermann, 1934).

Une courbe $u$ sur la surface (V) correspond, à travers (U), à une courbe $u$ de la surface $(U_1)$ et à une courbe $u$ de la surface $(U_2)$. Prenons un point $U_2$ et son homologue V sur la surface (V). L'hyperplan polaire de $U_2$ par rapport à Q contient la courbe $v$ issue de V sur (V). Lorsque $u$ varie, cet hyperplan varie en général. Pour que la courbe $u$ passant par V sur (V) appartienne à un hyperplan, il faut que $U_2$ reste fixe quand $u$ varie, c'est-à-dire que le point $U_2$ ne dépende que de $v$. L'hyperplan contenant la courbe $u$ est alors l'hyperplan polaire de $U_2$, c'est-à-dire l'hyperplan $VV_1V_2V_3V_4$. Les tangentes aux courbes $v$ aux points d'une courbe $u$ de $(U_1)$ passent par $U_2$ et forment un cône. La suite L s'arrête au point $U_2$ en présentant le cas de Laplace.

De même, si les surfaces réglées $R_v$ appartiennent à des complexes linéaires, la suite L doit s'arrêter au point $V_2$ en présentant également le cas de Laplace. Le point $V_2$ ne dépend que de $u$.

On a

$$h_1 = -(\log. b)^{11} + 4ab, \quad h_2 = -(\log. bh_1)^{11} + h_1 = 0,$$

$$k_1 = -(\log. a)^{11} + 4ab, \quad k_2 = -(\log. ak_1)^{11} + k_1 = 0.$$

**3.** Représentons par $\Omega(p, q) = 0$ la condition pour que deux points $p$, $q$ de $S_5$ soient conjugués par rapport à Q, de telle sorte que l'équation de cette hyperquadrique soit $\Omega(p, p) = 0$.

Nous avons

$$\Omega(U_2, V_2) = 0,$$

d'où, en dérivant par rapport à $u$ et à $v$, $U_2$ ne dépendant que de $v$ et $V_2$ de $u$,

$$\Omega(U_2^{0m}, V_2^{n0}) = 0, \qquad (m, n = 1, 2, \ldots).$$

Si la courbe $(U_2)$ n'appartient pas à un hyperplan, le point $V_2$ étant le pôle de l'hyperplan $U_2U_2^{01}U_2^{02}U_2^{03}U_2^{04}$, qui ne dépend que de $v$, ne dépenderait que de $v$, ce qui est absurde.

Si la courbe $(U_2)$ appartenait à un hyperplan sans appartenir à un espace linéaire à trois dimensions, cet hyperplan $U_2U_2^{01}U_2^{02}U_2^{03}U_2^{04}$ serait fixe et son pôle $V_2$ serait fixe. Mais alors toutes les réglées $R_v$ appartiendraient à un même complexe linéaire, la surface $(x)$ appartiendrait à ce complexe, ce qui est absurde.

Si la courbe $(U_2)$ appartient à un espace linéaire à trois dimensions, sans appartenir à un plan, cet espace est fixe et sa conjuguée par rapport à Q est une droite fixe qui doit contenir les points, variables avec $u$, $V_2$, $V_2^{10}$, $V_2^{20}$, ... La courbe $(V_2)$ est une droite.

Si la courbe $(U_2)$ est plane, sans être une droite, les points $V_2$, $V_2^{10}$, $V_2^{20}$, ... doivent appartenir au plan conjugué du premier et la courbe $(V_2)$ est plane.

Le cas où la courbe $(U_2)$ serait une droire revient, sauf un changement de notation, à l'avant-dernier cas examiné.

Nous voyons donc que deux cas sont possibles :

*a)* La courbe $(U_2)$ appartient à un espace à trois dimensions fixe et la courbe $(V_2)$ est une droite.

*b)* Les courbes $(U_2)$, $(V_2)$ appartiennent à des plans fixes, conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q.

**5.** Examinons le premier cas. Les points $V_2$, $V_2^{10}$, $V_2^{20}$ étant en ligne droite, nous devons avoir une relation de la forme

$$V_2^{20} + AV_2^{10} + BV_2 = 0. \tag{1}$$

Nous avons

$$\Omega(V_2, U) = 0, \qquad \Omega(V_2^{10}, U) = -4bA,$$

$$\Omega(V_2^{20}, U) = 4b\varDelta\left(\log. \frac{a^2k_1}{b}\right)^{10},$$

où

$$\varDelta = |\, x \quad x^{10} \quad x^{01} \quad x^{11}\,|,$$

$$\Omega(V_2^{20}, U) + A\Omega(V_2^{10}, U) + B\Omega(V_2, U) = 0.$$

On en déduit

$$A = \left(\log. \frac{a^2k_1}{b}\right)^{10}.$$

Les points $V_2$, $V_2^{10}$, $V_2^{20}$ étant indépendants de $v$, on déduit de la relation (1), en la dérivant par rapport à $v$,

$$A^{01}V_2^{10} + B^{01}V_2 = 0.$$

Mais il ne peut exister une relation entre $V_2$ et $V_2^{10}$, sans quoi $V_2$ serait fixe, donc on a $A^{01} = 0$, $B^{01} = 0$. Nous devons donc avoir

$$\left(\log.\ \frac{a^2 k_1}{b}\right)^{11} = 0.$$

En utilisant les relations

$$(\log.\ a^2 k_1)^{11} = 4ab - k_2 = 4ab, \qquad (\log.\ b)^{11} = 4ab - h_1,$$

on en déduit $h_1 = 0$. Mais alors, la suite L s'arrêterait au point $U_1$, ce qui est impossible.

Le premier cas ne peut donc se présenter.

**5.** Dans le second cas, nous désignerons par $\eta$ le plan fixe qui contient la courbe $(U_2)$ et par $\xi$ celui qui contient la courbe $(V_2)$. Comme nous l'avons dit, ces deux plans sont conjugués par rapport à Q.

Nous devons avoir une relation de la forme

$$V_2^{10} + AV_2^{20} + BV_2^{30} + CV_2 + 0.$$

On en déduit

$$\Omega(V_2^{20}, U_1) + A\Omega(V_2^{30}, U_1) = 0.$$

En dérivant $\Omega(V^{20}, U)$ par rapport à $v$, on trouve $\Omega(V^{20}, U_1) = 4bh_1\Delta$, puis, en dérivant cette relation par rapport à $u$,

$$\Omega(V_2^{30}, U_1) = -\,4bh_1\Delta\left(\log.\ \frac{a^2k_1}{b^2h_1}\right)^{10},$$

d'où

$$A = \left(\log.\ \frac{a^2k_1}{b^2h_1}\right)^{10}.$$

On pourrait calculer B et C en utilisant les relations

$$\Omega(V_2^{30}, U) + A\Omega(V_2^{20}, U) + B\Omega(V_2^{10}, U) = 0,$$

$$\Omega(V_2^{30}, V) + A\Omega(V_2^{20}, V) + B\Omega(V_2^{10}, V) + C\Omega(V_2, V) = 0.$$

Les calculs sont assez longs et ne présentent guère d'intérêt.

Remarquons que l'on doit avoir $A^{01} = B^{01} = C^{01} = 0$, ce qui se vérifie dans le cas de A. On a en effet

$$A^{01} = (\log. a^2k_1)^{11} - (\log. b^2k_1)^{11} = 4ab - 4ab = 0.$$

On a de même une relation de la forme

$$U_2^{03} + A_1U_2^{02} + B_1U_2^{01} + C_1U_2 = 0.$$

que l'on peut former de la même manière. On doit avoir $A_1^{10} = B_1^{10} = C_1^{10}$, ce qui se vérifie facilement dans le cas de $A_1$. On a en effet

$$A_1 = \left(\log. \frac{b^2h_1}{a^2k_1}\right)^{01}.$$

6. Les deux modes de génératrices rectilignes de la quadrique de Lie $\Phi$ sont représentés sur Q par les sections de cette hyperquadrique par les plans $UU_1U_2$, $VV_1V_2$.

Les sections de Q par les plans $U_1U_2U_2^{01}$, $V_1V_2V_2^{10}$, représentent les deux modes de génératrices rectilignes d'une seconde quadrique $\Phi_1$.

Enfin, les sections de Q par les plans fixes $\eta = U_2U_2^{01}U_2^{02}$ et $\xi = V_2V_2^{10}V_2^{20}$ représentent les deux modes de génératrices rectilignes d'une quadrique $\Phi_2$.

Comme on le sait, les quadriques $\Phi$ et $\Phi_1$ se touchent en quatre points qui sont des points caractéristiques pour les deux quadriques. De même, les quadriques $\Phi_1$ et $\Phi_2$ se touchent en quatre points caractéristiques pour les deux quadriques. Actuellement, la quadrique $\Phi_2$ est fixe et fait donc partie de l'enveloppe des quadriques $\Phi_1$.

Désignons par $\Theta$ la polarité par rapport à la quadrique $\Phi_2$. On sait qu'il lui correspond dans $S_5$ une homographie biaxiale harmonique T, ayant pour axes ponctuels les plans $\eta$ et $\xi$. L'homographie T transforme évidemment l'hyperquadrique Q en soi.

Les hyperplans passant par $\eta$ et en particulier les hyperplans polaires des points $V_2$, et les hyperplans passant par $\xi$ et en particulier les hyperplans polaires des points $U_2$, sont unis pour l'homographie T, Considérons la suite de Laplace

$$U_2,\ U_1,\ U,\ V,\ V_1,\ V_2, \qquad (L)$$

et appliquons-lui la transformation T. Il lui correspond une suite de Laplace L qui possède les mêmes points $U_2$, $V_2$ et que nous indiquerons par

$$U_2,\ \bar{U}_1,\ \bar{U},\ \bar{V},\ \bar{V}_1,\ V_2. \qquad (\bar{L})$$

Supposons que les droites $UU_1$, $\bar{U}\bar{U}_1$ puissent se rencontrer en un point $J_1$. Alors ce point engendre un réseau $(u, v)$ conjugué à chacune des congruences $(UU_1)$, $(\bar{U}\bar{U}_1)$. Son transformé de Laplace dans le sens des $u$ est un point J intersection des droites UV, $\bar{U}\bar{V}$. Ces deux droites se correspondent dans T, donc le point J est uni pour cette homographie. Mais cela est absurde, car le point J n'appartient pas nécessairement ni à l'hyperplan $UU_1U_2U_2^{01}U_2^{02}$, ni à l'hyperplan $VV_1V_2V_2^{10}V_2^{20}$. Par conséquent les droites $UU_1$ et $\bar{U}\bar{U}_1$, UV et $\bar{U}\bar{V}$, $VV_1$ et $\bar{V}\bar{V}_1$ ne peuvent se rencontrer.

La suite $\bar{L}$ correspond à une surface $(\bar{x})$ rapportée également à ses asymptotiques $u$, $v$ et la droite $x\bar{x}$ n'est tangente ni à la surface $(x)$, ni à la surface $(\bar{x})$.

*Si les réglées gauches asymptotiques des deux modes d'une surface appartiennent à des complexes linéaires, à chaque point de cette surface sont attachées trois quadriques: la quadrique de Lie $\Phi$, une quadrique $\Phi_1$ qui touche la quadrique $\Phi$ en quatre points et une quadrique fixe $\Phi_2$ touchée en quatre points par les quadriques $\Phi_1$. Les complexes linéaires contenant les rélgées asymptotiques d'un mode contiennent les génératrices rectilignes d'un mode de la quadrique $\Phi_2$ et ceux qui contiennent les réglées de l'autre mode contiennent les génératrices rectilignes de l'autre mode de $\Phi_2$.*

*La polarité par rapport à la quadrique $\Phi_2$ laisse les complexes linéaires invariants mais change la surface en une surface analogue.*

**7.** Considérons un point $U_2$ et un point $V_2$. Leurs hyperplans polaires par rapport à Q : $VV_1V_2V_2^{10}V_2^{20}$, $UU_1U_2U_2^{01}U_2^{02}$ ont en commun un espace à trois dimensions dont la droite conjuguée est la droite $U_2V_2$. Cette droite rencontre l'hyperquadrique Q en deux points $G_1$, $G_2$ qui représentent les directrices de Wilczynski de seconde espèce de la surface $(x)$ relatives au point $x$.

On en conclut que les complexes linéaires contenant les réglées $R_u$, $R_v$ relatives à deux courbes $u$, $v$ passant par un point $x$ de $(x)$, ont en commun une congruence linéaire dont les axes sont les directrices de Wilczynski de seconde espèce relatives au point $x$.

Observons que les points $U_2$, $V_2$ sont unis pour T, donc les points $G_1$, $G_2$ sont échangés entre eux par T. Les droites $g_1$, $g_2$ qui leur correspondent sont donc conjuguées par rapport à la polarité $\Theta$.

Nous avons

$$\Omega(U_2, U_2) = -2[\beta + \overline{(\log.\ bh_1)^{01}}^2],$$

$$\Omega(V_2, V_2) = 2[\alpha + \overline{(\log.\ ak_1)^{10}}^2].$$

Posons pour abréger

$$A = \alpha + \overline{(\log.\ ak_1)^{10}}^2, \qquad B = \beta + \overline{(\log.\ bh_1)^{01}}^2,$$

et observons que l'on a

$$A^{01} = -2k_1(\log.\ ak_1)^{10} + 2(\log.\ ak_1)^{10}(\log.\ ak_1)^{11} = 0, \quad B^{10} = 0,$$

car $k_1 = (\log.\ ak_1)^{11}$, $h_1 = (\log.\ bh_1)^{11}$. Nous poserons

$$G_1 = \sqrt{A}\, U_2 + \sqrt{B}\, V_2, \qquad G_2 = \sqrt{A}\, U_2 - \sqrt{B}\, V_2.$$

Nous avons successivement

$$G_1^{10} = \frac{1}{2}\frac{A^{10}}{\sqrt{A}} U_2 + \sqrt{B}\, V_2^{10}, \qquad G_1^{01} = \sqrt{A}\, U_2^{01} + \frac{1}{2}\frac{B^{01}}{\sqrt{B}} V_2,$$

$$G_1^{11} = \frac{1}{2}\frac{A^{10}}{\sqrt{A}} U_2^{01} + \frac{1}{2}\frac{B^{01}}{\sqrt{B}} V_2^{10}.$$

On en déduit

$$G_1^{11} - \frac{1}{2}\frac{A^{10}}{A} G_1^{01} - \frac{1}{2}\frac{B^{01}}{B} G_1^{10} + \frac{1}{4}\frac{A^{10}B^{01}}{AB} G_1 = 0.$$

Les courbes $u$, $v$ forment donc un réseau conjugué sur la surface $(G_1)$ et la droite $g_1$ engendre une congruence W.

Nous avons de même

$$G_2^{11} - \frac{1}{2}\frac{A^{10}}{A}G_2^{01} - \frac{1}{2}\frac{B^{01}}{B}G_2^{10} + \frac{1}{4}\frac{A^{10}B^{01}}{AB}G_2 = 0,$$

et la droite $g_2$ engendre également une congruence W.

On observera que sur la surface $(G_1)$ par exemple, les courbes $u$ sont découpées par les cônes projetant la courbe $(V_2)$ des points de la courbe $(U_2)$ et ces courbes appartiennent donc à des espaces linéaires à trois dimensions. De même, les courbes $v$ sur $(G_1)$ sont découpées par les cônes projetant la courbe $(U_2)$ des points de la courbe $(V_2)$ et ces courbes appartiennent également à des espaces linéaires à trois dimensions.

*Les directrices de Wilczynski de seconde espèce d'une surface dont les réglées gauches asymptotiques des deux modes appartiennent à des complexes linéaires, engendrent des congruences* W *transformées l'une de l'autre par la polarité par rapport à la quadrique $\Phi_2$.*

**8.** Les réseaux $(G_1)$ et $(G_2)$ présentent une propriété assez curieuse.

Appelons $M_1$ le transformé de Laplace de $G_1$ dans le sens des $u$ et $N_1$ son transformé de Laplace dans le sens des $v$. On a

$$M_1 = G_1^{10} - \frac{1}{2}\frac{A^{10}}{A}G_1 = \frac{1}{2}\frac{A^{10}}{\sqrt{A}}U_2 + \sqrt{B}\,V_2^{10} - \frac{1}{2}\frac{A^{10}}{A}(\sqrt{A}\,U_2 + \sqrt{B}\,V_2),$$

$$M_1 = \sqrt{B}\left(V_2^{10} - \frac{1}{2}\frac{A^{10}}{A}V_2\right).$$

Le point $M_1$ reste fixe lorsque $v$ varie et est situé dans le plan $\xi$. On a également

$$N_1 = G_1^{01} - \frac{1}{2}\frac{B^{01}}{B}G_1 = \sqrt{A}\,U_2^{01} + \frac{1}{2}\frac{B^{01}}{\sqrt{B}}V_2 - \frac{1}{2}\frac{B^{01}}{B}(\sqrt{A}\,U_2 + \sqrt{B}\,V_2),$$

$$N_1 = \sqrt{A}\left(U_2^{01} - \frac{1}{2}\frac{B^{01}}{B}U_2\right),$$

le point $N_1$ reste fixe lorsque $u$ varie et se trouve dans le plan $\eta$.

En appelant $M_2$ et $N_2$ les transformés de Laplace de $G_2$ dans le sens des $u$ et dans celui des $v$, on a

$$M_2 = -\sqrt{B}\left(V_2^{10} + \frac{1}{2}\frac{A^{10}}{A}V_2\right), \quad N_2 = \sqrt{A}\left(U_2^{01} + \frac{1}{2}\frac{B^{01}}{B}U_2\right)$$

et $M_2$ reste fixe quand $v$ varie, $N_2$ lorsque $u$ varie.

Les réseaux $(G_1)$, $G_2)$ donnent naissance à des suites de Laplace qui se terminent dans les deux sens au premier transformé, en présentant le cas de Laplace.