GEOMETRIE.-Sur les surfaces de genres 1 triples, douées d'un nombre fini de points de diramation. Note de M. Lucien Godeaux, présentée par M. Emile Picard.

(C.R., 28 Décembre 1914)

Soit Φ une surface de genres $1(p_a = P_4 = 1)$, triple, douée d'un nombre fini de points de diramation, c'est-à-dire une surface image d'une involution d'ordre 3, n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique F. On sait que F est une surface de Picard($p_a = -1, p_g = P_4 = 1$) ou une surface de genres $1(p_a = P_4 = 1)$. Le premier cas a été examiné par M.M. Enriques et Severi (Acta Mathematica, 1909). Dans le second cas, nous avons montré que la surface Φ (supposée normale) possède six points de diramation qui sont six points doubles biplanaires ordinaires (Annales de l'Ecole Normale, 1914). Nous avons recherché quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la surface Φ, possédant six points doubles biplanaires ordinaires, soit l'image d'une involution d'ordre trois, appartenant à une surface F de genres $1(p_a = P_4 = 1)$.

Désignons par $|\Gamma|$ le système des sections hyperplanes de Φ (supposée normale), par $\Gamma_{11}, \Gamma_{12}; \Gamma_{21}, \Gamma_{22}; \ldots; \Gamma_{61}, \Gamma_{62}$ les six couples de courbes rationnelles équivalentes, au point de vue des transformations birationnelles, aux six points doubles biplanaires de Φ. On démontre qu'il existe sur Φ, deux systèmes $|\Gamma_{01}|, |\Gamma_{02}|$ tels que

$$3\Gamma_{01} + 2(\Gamma_{11} + \Gamma_{21} + \ldots + \Gamma_{61}) + (\Gamma_{12} + \Gamma_{22} + \ldots + \Gamma_{62}) \equiv 3\Gamma,$$

$$3\Gamma_{02} + (\Gamma_{11} + \Gamma_{21} + \ldots + \Gamma_{61}) + 2(\Gamma_{12} + \Gamma_{22} + \ldots + \Gamma_{62}) \equiv 3\Gamma.$$

Soit π le genre des sections hyperplanes Γ de Φ ; on sait alors que Φ, étant normale, est située dans un espace linéaire à π dimensions. Parmi les variétés cubiques de cet S_π, il y en a, passant par les six points doubles de Φ, qui osculent Φ le long de chacune des courbes Γ_{01}, Γ_{02}. Si nous désignons par

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\pi)=0, \varphi_2=0, \ldots, \varphi_{\pi-2}=0$$

les équations de Φ (en coordonnées cartésiennes), par

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_\pi)=0$$

l'équation d'une variété cubique osculant Φ le long d'une courbe Γ_{01} (ou Γ_{02}), les équations

$$\varphi_1=0, \varphi_2=0, \ldots, \varphi_{\pi-2}=0, x^3_{\pi+1}=f$$

représentent une surface qu'on démontre être de genres 1.

L'existence de l'un des systèmes $|\Gamma_{01}|$, $|\Gamma_{02}|$ est donc nécessaire et suffisante.

De même, on démontre que, si Ψ est une surface normale de genres 0 et de bigenre 1 $(p_a=P_3=0, P_2=1)$ possédant trois points doubles biplanaires ordinaires, pour que cette surface représente une involution d'ordre 3 appartenant à une surface de genres 0 et de bigenre 1, il faut et il suffit qu'il existe sur Ψ, un des systèmes $|C_{01}|$, $|C_{02}|$ tels que

$$3C_{01} + 2(C_{11} + C_{21} + C_{31}) + (C_{12} + C_{22} + C_{32}) \equiv 3C,$$

$$3C_{02} + (C_{11} + C_{21} + C_{31}) + 2(C_{12} + C_{22} + C_{32}) \equiv 3C,$$

$|C|$ étant le système des sections hyperplanes de Ψ ; C_{11}, C_{12} ; C_{21}, C_{22} ; C_{31}, C_{32} les trois couples de courbes rationnelles équivalentes aux trois points doubles biplanaires de cette surface.