Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 28e année, no 9-10, 1959, pp. 193-197

SUR LE SYSTÈME DES SURFACES CUBIQUES PASSANT PAR UNE QUARTIQUE GAUCHE DE SECONDE ESPÈCE

par Lucien GODEAUX (*)
Membre de la Société

Dans leur recherche des groupes continus finis de transformations birationnelles de l'espace, F. Enriques et G. Fano (1) ont rencontré un groupe ∞^3 laissant invariant le système des surfaces cubiques passant par une quartique gauche de seconde espèce. Remarquant que les surfaces cubiques passant par une telle courbe et par un conique s'appuyant en quatre points sur la courbe précédente formaient un système homaloïdal, nous nous sommes proposé de voir si le groupe en question pourvait être engendré par les transformations birationnelles obtenues en partant des systèmes homaloïdaux de ce type. La réponse est négative.

1. Soient Γ_4 une quartique gauche de seconde espèce, Q la quadrique qui la contient. Les surfaces cubiques qui doivent contenir Γ_4 doivent passer par treize points de cette courbe ; ces surfaces forment donc un système linéaire $|F|$ de dimension six. Parmi ces surfaces, se trouvent ∞^3 surfaces formées de la quadrique Q et des plans de l'espace.

Deux surfaces F se rencontrent suivant une courbe du cinquième ordre, elliptique, s'appuyant en dix points sur Γ_4.

Soient Γ_2 une conique s'appuyant en quatre points sur Γ_4 et n'appartenant pas à Q, σ son plan. Les surfaces F contenant Γ_2 forment un système linéaire ∞^3, $|F_1|$, homaloïdal. En effet, deux surfaces F_1 ont en commun une cubique gauche s'appuyant en six points sur Γ_4 et en deux points sur Γ_2. Trois surfaces F_1 n'appartenant pas à un même faisceau se coupent donc en un point en dehors de Γ_4 et de Γ_2.

(*) Reçu, le 12 mars 1959.

(1) F. Enriques et G. Fano, *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio* (Annali di Matematica, 1907, pp. 1-40).

La jacobienne du système $|F_1|$ est formée de la quadrique Q et d'une surface Φ_6, d'ordre six, lieu des bisécantes de Γ_4 s'appuyant sur Γ_2. Cette surface passe deux fois par Γ_4 et trois fois par Γ_2. En rapportant projectivement les surfaces F_1 aux plans α' d'un second espace, on définit une transformation birationnelle T_1. Aux trisécantes de Γ_4 (génératrices de Q) correspondent les points d'une conique Γ_2'. Aux génératrices de Φ_6 correspondent les points d'une quartique rationnelle Γ_4' rencontrant la conique Γ_2' en quatre points homologues des quatre droites communes à Q et à Φ_6. Aux plans α du premier espace correspondent des surfaces cubiques F_1' passant par Γ_4' et Γ_2', formant un système $|F_1'|$ analogue à $|F_1|$. La quartique Γ_4' est de seconde espèce.

Les invariants projectifs des quartiques Γ_4, Γ_4' sont à priori distincts. S'ils sont égaux, il existe une homographie H faisant correspondre Γ_4 à Γ_4'.

Considérons alors la transformation $T = T_1H$. Aux plans de l'espace, T fait correspondre les surfaces cubiques, que nous désignerons encore par F_1', passant par la quartique Γ_4 et par une conique Γ_2'', s'appuyant en quatre points sur Γ_4 et n'appartenant pas à Q. Soit σ'' le plan de cette conique. Aux plans α', T^{-1} fait correspondre les surfaces F_1. Nous sommes ainsi conduit à l'étude de la transformation T et nous verrons qu'elle ne peut exister.

2. Appliquons la transformation T, supposée existante, à une surface cubique F passant par Γ_4. A cette surface, correspond une surface du neuvième ordre passant trois fois par chacune des courbes Γ_4, Γ_2', comprenant comme partie la surface Φ_6', lieu des bisécantes de Γ_4 s'appuyant sur Γ_2'. La transformée de F est donc une surface cubique passant par Γ_4. Par conséquent, T transforme en soi le système $|F|$.

Considérons une seconde transformation $\overline{T}$ analogue à la première et soient $\overline{\Gamma}_2$, $\overline{\Gamma}_2'$ les coniques relatives à cette transformation. Aux plans, $\overline{T}$ fait correspondre des surfaces cubiques $\overline{F}_1'$ passant par Γ_4 et $\overline{\Gamma}_2'$, $\overline{T}^{-1}$ fait correspondre les surfaces cubiques $\overline{F}_1$ passant par Γ_4 et $\overline{\Gamma}_2$. Considérons le produit $T\overline{T}$.

Observons qu'à une conique γ_2 s'appuyant en quatre points sur Γ_4 et n'appartenant pas à Q, T fait correspondre une courbe du sixième ordre formée de quatre génératrices de Φ_6' et d'une conique γ_2' s'appuyant en quatre points sur Γ_4 et n'appartenant pas à Q.

Aux surfaces F_1', $\overline{T}$ fait correspondre des surfaces cubiques F_1'' passant par Γ_4 et par la conique Γ_2'' que $\overline{T}$ fait correspondre à Γ_2'. On en conclut qu'aux plans de l'espace, $T\overline{T}$ fait correspondre les surfaces F_1'' formant un système homaloïdal analogue à $| F_1 |$.

Par conséquent, si les transformations T existent, elles forment un groupe laissant invariant le système $| F |$ des surfaces cubiques passant par Γ_4.

3. Supposons qu'il existe une transformation T involutive. Aux plans de l'espace T et T^{-1} font donc correspondre les surfaces F_1 de $| F_1 |$.

Le système $| F_1 |$ contient une seule surface dégénérée : la surface formée du plan σ de Γ_2 et de la quadrique Q. Au plan σ, T fait correspondre la surface $\sigma + Q$, Q correspond aux points de Γ_2, donc le plan σ se correspond à lui-même. Soit r une droite de σ. A un plan passant par r et distinct de σ correspond une surface F_1 passant par Γ_2 et rencontrant encore σ suivant une droite r'.

Donc T détermine dans σ une homographie ; celle-ci est involutive et est par conséquent une homologie harmonique h de centre A et d'axe a.

Au domaine d'un point P_1 de Γ_2 correspond une droite p de Q, trisécante de Γ_4. Soit P_2 le point de rencontre de p avec σ. h fait correspondre P_2 à P_1 et par suite la conique (Q, σ) à Γ_2.

Soient A_1, A_2, A_3, A_4 les points de rencontre de Γ_4 avec σ, c'est-à-dire les points de rencontre des coniques (Q, σ) et Γ_2. Deux de ces points, par exemple A_1, A_2 appartiennent à a et les deux autres A_3, A_4 sont alignés sur A. Nous désignerons par a_1, a_2 les trisécantes de Γ_4 passant par A_1, A_2.

4. Soient k une droite de l'espace et K la cubique gauche que T lui fait correspondre. Aux plans passant par k, T fait correspondre projectivement les surfaces F_1 passant par K. Le lieu des cubiques communes aux éléments homologues de ces deux faisceaux projectifs est une surface du quatrième ordre Ψ, transformée en soi par T et passant par Γ_4, Γ_2, k et K.

Supposons en particulier que la droite k appartienne au plan σ. Comme à σ correspond la surface $\sigma + Q$, la surface Ψ dégénère en le plan σ et une surface cubique F_o passant par Γ_4 mais non par Γ_2. Cette surface F_o est transformée en soi par T et lorsque k varie dans σ, elle engendre un réseau $| F_o |$.

Si en particulier la droite k coïncide avec a, les surfaces F_1 homologues des plans passant par a contiennent les droites a, a_1, a_2 (qui forment la cubique gauche K homologue de a). La surface F_o passe par ces trois droites. Nous la désignerons par F'_o.

Si la droite k passe par A, les surfaces F_1 homologues des plans passant par k passent par cette droite, qui est unie pour T. La surface F_o correspondante, que nous désignerons par F''_o, passe par k.

Lorsque k est distincte de a et ne passe pas par A, la surface F_o passe par le point (a, k).

La surface F_1 homologue d'un plan α coupe celui-ci suivant une cubique (α, F_1) transformée en soi par T. Les couples homologues dans T sur (α, F_1) forment une involution qui a un point double sur a et qui par conséquent est rationnelle. Elle possède donc trois autres points unis. Il en résulte que la transformation T possède une courbe de points unis formée de la droite a et d'une cubique gauche (éventuellement dégénérée) U. Cette courbe U appartient à toutes les surfaces F_o, elle passe par A et s'appuie en deux points sur a.

5. Dans le système $|F|$, de dimension six, transformé en soi par T, il existe deux systèmes linéaires composés au moyen de l'involution déterminée par T. L'un comprend les surfaces F_o, qui passent par U et l'autre, la surface $Q + \sigma$, qui passe par a mais non par U. Le premier système, de dimension $r_1 \geqslant 2$, sera donc formé de surface F passant par U et le second, de dimension $r_2 \geqslant 0$, de surfaces F passant par a. On a $r_1 + r_2 = 5$.

Dans le système $|F|$, il y a ∞^3 surfaces formées de Q et d'un plan. Il y aura donc certainement de ces surfaces, distinctes de $\sigma + Q$, appartenant à l'un ou l'autre des systèmes précédents. Et ces surfaces doivent passer par U, ce qui est impossible, ou par a. Ces dernières surfaces sont formées de Q et des plans passant par a. Mais alors, on a $r_2 = 1$ et $r_1 = 4$. Il y aura donc des surfaces $r + Q$ appartenant au premier système et passant par U, ce qui est impossible.

On en conclut qu'il n'existe aucune transformation T involutive.

6. Supposons qu'il puisse exister une transformation T non involutive.

Aux plans de l'espace, T fait correspondre des surfaces F_1 passant par Γ_4 et par une conique Γ'_2 de plan σ', T^{-1} des surfaces F'_1 passant par Γ_4 et par une conique Γ_2 de plan σ.

Dans le système homaloïdal $|F_1|$, il y a une seule surface dégénérée : $\sigma + Q$ et dans le système $| F'_1 |$ également une seule surface dégénérée, la surface $\sigma' + Q$.

Dans $| F |$, on peut choisir sept surfaces linéairement indépendantes : Trois non dégénérées $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ et quatre surfaces dégénérées en Q et un plan. Le système $| F_1 |$ est le système linéaire déterminé par $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ et $\sigma + Q$. Le système $|F'_1|$ est déterminé par $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ et par $\sigma' + Q$. Dans le système linéaire de dimension quatre déterminé par les surfaces $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ et $\sigma + Q$, $\sigma' + Q$, les systèmes $| F_1 |$, $| F'_1 |$ ont en commun un réseau $| \overline{F} |$. Ce réseau ne peut contenir aucune des surfaces $\sigma + Q$, $\sigma' + Q$, ni une surface appartenant au faisceau déterminé par ces deux dernières. Les surfaces $\overline{F}$ sont irréductibles.

Dans T, les surfaces $\overline{F}$ correspondent aux plans passant par un point B et dans T^{-1}, aux plans passant par un point B'. Il en résulte qu'à un plan α passant par B, T^2 fait correspondre un plan α' passant par B'. Mais T^2 est une transformation du même type que T et fait correspondre aux plans de l'espace des surfaces cubiques irréductibles sauf l'une d'elles, qui correspond au plan σ. Actuellement, T^2 ferait correspondre des surfaces dégénérées aux ∞^2 plans passant par B, ce qui est absurde. La transformation T ne peut donc exister.

Si l'on en revient à la transformation T_1 définie au début entre deux espaces distincts, on en conclut que les courbes Γ_4, Γ'_4 ne peuvent avoir même invariant projectif.

Liège, le 27 février 1959.